6.3 COMPRIMENTO DE ARCO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Outra aplicação geométrica da integral definida é feita no cálculo do comprimento de arco do gráfico de uma função. Quando tratamos de áreas e volumes, usamos as expressões "medidas da área" e "medidas do volume" para indicar um número sem quaisquer unidades de medida incluídas. Em nossa discussão sobre comprimento do arco usaremos a palavra "comprimento", em vez de "medida do comprimento". Deve ser entendido, então, que o comprimento de um arco é um número puro, isto é, sem unidades de medidas.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Considere o gráfico dessa função definida pela relação $y = f(x)$, cujo esboço está na Figura 1. A parte da curva do ponto $A\,(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada de *arco*. Queremos atribuir ao arco um número o qual pensamos intuitivamente ser o seu comprimento. Se o arco for um segmento de reta do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), da fórmula da distância entre dois pontos sabemos que seu comprimento será dado por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Vamos usar essa fórmula para definir, em geral, o comprimento de um arco. Lembre-se, da Geometria, que a circunferência de um círculo é definida como o limite dos perímetros de polígonos regulares inscritos no círculo. Para outras curvas, procedemos de forma análoga.

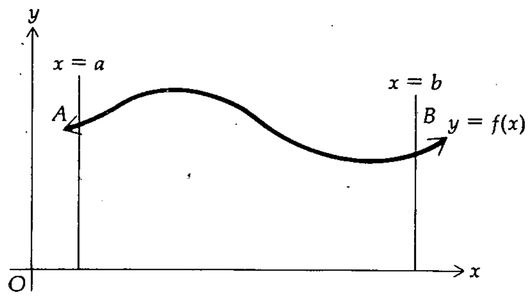

FIGURA 1

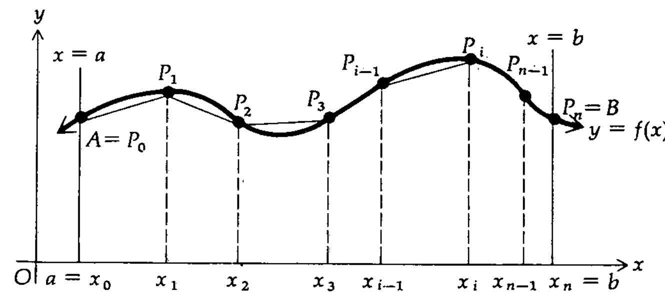

FIGURA 2

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ formada ao dividirmos o intervalo em n subintervalos, escolhendo $(n - 1)$ números intermediários entre a e b. Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ números intermediários, de tal forma que $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Então, o i-ésimo subintervalo será $[x_{i-1}, x_i]$; seu comprimento denotado por $\Delta_i x$ será $x_i - x_{i-1}$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, se $\|\Delta\|$ for a norma da partição Δ, cada $\Delta_i x \leqslant \|\Delta\|$.

Associado a cada ponto $(x_i, 0)$ no eixo x está um ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ sobre a curva. Trace um segmento de reta de cada ponto P_{i-1} ao próximo ponto P_i, conforme mostra a Figura 2. O comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é denotado por $|\overline{P_{i-1}P_i}|$, sendo dado pela fórmula

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{1}$$

A soma dos comprimentos desses segmentos de reta é

$$|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| + \ldots + |\overline{P_{i-1}P_i}| + \ldots + |\overline{P_{n-1}P_n}|$$

que pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{2}$$

Parece plausível que se n for suficientemente grande, a soma em (2) estará "próxima" do que intuitivamente pensamos ser o comprimento do arco AB. Assim, definimos o comprimento do arco como sendo o limite da soma (2) quando a norma de Δ tende a zero, e nesse caso n cresce sem limitação. Temos, então, a definição a seguir.

6.3.1 DEFINIÇÃO Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, suponhamos que exista um número L tendo as seguintes propriedades:

Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ seja verdade que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{3}$$

e L é chamado de **comprimento do arco** da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

Se o limite em (3) existir, dizemos que o arco é **retificável.**

Vamos deduzir uma fórmula para encontrar o comprimento L de um arco retificável. A dedução exige que a derivada de f seja contínua em $[a, b]$; dizemos que tal função é **suave** em $[a, b]$.

Consulte a Figura 3. Se P_{i-1}, tiver coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) e P_i tiver coordenadas (x_i, y_i), então o comprimento da corda $P_{i-1}P_i$ será dado pela fórmula (1).

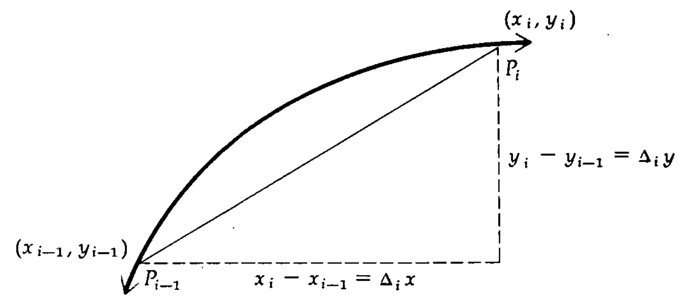

FIGURA 3

Tomando $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, temos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

ou, equivalentemente, como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,(\Delta_i x) \tag{4}$$

Como exigimos que f' seja contínua em $[a, b]$, as hipóteses do teorema do valor médio (4.3.2) estão satisfeitas por f; assim, existe um número z_i no intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Como $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, da equação acima, teremos

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i)$$

Substituindo essa equação em (4), obtemos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Para cada i de 1 até n, existe uma expressão dessa forma, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Tomando o limite de ambos os membros dessa expressão quando $\|\Delta\|$ tende a zero, obtemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x \tag{5}$$

se o limite existir.

Para mostrar que o limite do segundo membro de (5) existe, seja F a função definida por

$$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Como estamos impondo que f' seja contínua em $[a, b]$, F será contínua em $[a, b]$. Como $x_{i-1} < z_i < x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, no lado direito de (5), temos o limite de uma soma de Riemann que é uma integral definida. Portanto, de (5)

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De (3), o primeiro membro é L; portanto

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Dessa forma, provamos o teorema a seguir.

6.3.2 TEOREMA Se a função f e sua derivada f' forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ será dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Temos também o teorema a seguir, que dá o comprimento do arco de uma curva quando x é expressa como uma função de y.

6.3.3 TEOREMA Se a função g e sua derivada g' forem contínuas no intervalo fechado $[c, d]$, então o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ do ponto $(g(c), c)$ ao ponto $(g(d), d)$ será dado por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

A demonstração do Teorema 6.3.3 é idêntica àquela do Teorema 6.3.2; basta trocarmos x por y e f por g.

A integral definida obtida quando aplicamos os Teoremas 6.3.2 ou 6.3.3, é freqüentemente difícil de calcular. Como nossas técnicas de integração limitam-se à integração de potências e a algumas funções trigonométricas, encontraremos apenas as equações de curvas para as quais podemos calcular as integrais definidas resultantes e achar o comprimento de um arco.

EXEMPLO 1 Ache o comprimento do arco da curva $y = x^{2/3}$ do ponto (1, 1) a (8, 4), usando o Teorema 6.3.2.

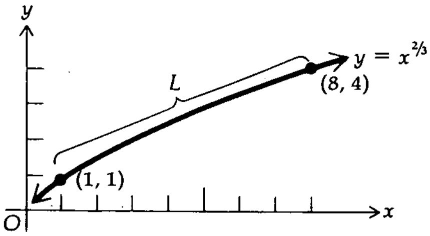

FIGURA 4

Solução Veja a Figura 4. Como $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Do Teorema 6.3.2,

$$L = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}}\, dx$$

Para calcular essa integral definida, seja $u = 9x^{2/3} + 4$; então, $du = 6x^{-1/3}\,dx$. Quando $x = 1$, $u = 13$ e quando $x = 8$, $u = 40$. Logo,

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\,du \\ &= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13}^{40} \\ &= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7{,}6 \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache o comprimento de arco no Exemplo 1, usando o Teorema 6.3.3.

Solução Como $y = x^{2/3}$ e $x > 0$, resolvemos em x obtendo $x = y^{3/2}$. Vamos tomar $g(y) = y^{3/2}$ e teremos $g'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$. Então, do Teorema 6.3.3,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}y}\,dy \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4 + 9y}\,dy \\ &= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{2}{3}(4 + 9y)^{3/2}\right]_1^4 \\ &= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7{,}6 \end{aligned}$$

Usando a notação de Leibniz para derivadas, as fórmulas dos Teoremas 6.3.2 e 6.3.3 podem ser escritas como

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ e } L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy} \qquad (6)$$

Introduziremos agora a *função comprimento de arco* e a diferencial do comprimento de arco, a qual fornece um recurso mnemônico para que essas fórmulas sejam lembradas.

Se f' for contínua em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$ será uma função de x, e ela dará o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(x, f(x))$, onde x é qualquer número no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $s(x)$ o comprimento desse arco; assim, s é uma **função comprimento de arco** e

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$$

Do Teorema 5.8.1,

$$s'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

ou, como $s'(x) = ds/dx$ e $f'(x) = dy/dx$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Multiplicando a equação por dx, obtemos

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (7)$$

Da mesma forma, para o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ de $(g(c), c)$ a $(g(y), y)$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{8}$$

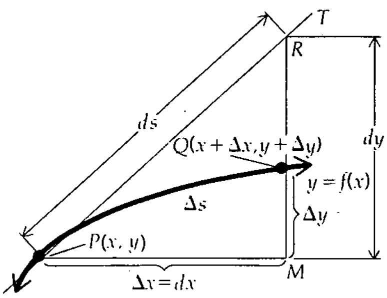

FIGURA 5

Observe que ds (a diferencial do comprimento de arco) é o integrando nas fórmulas (6). Elevando os dois membros ao quadrado de (7) ou de (8) resulta

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2} \tag{9}$$

Dessa equação temos a interpretação geométrica de ds, que está na Figura 5. Na figura, a reta T é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P. $|\overline{PM}| = \Delta x = dx$; $|\overline{MQ}| = \Delta y$; $|\overline{MR}| = dy$; $|\overline{PR}| = ds$; o comprimento do arco PQ é Δs. A Figura 5 fornece uma maneira fácil de lembrarmos (9), da qual as fórmulas (6) podem ser obtidas.

EXERCÍCIOS 6.3

1. Calcule o comprimento do segmento da reta $y = 3x$ do ponto $(1, 3)$ ao ponto $(2, 6)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
2. Calcule o comprimento do segmento da reta $x + 3y = 4$ do ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(4, 0)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
3. Calcule o comprimento do segmento da reta $4x + 9y = 36$ entre os seus interceptos x e y por três métodos: (a) use o Teorema de Pitágoras; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
4. Siga as instruções do Exercício 3 para a reta $5x - 2y = 10$.
5. Ache o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$ da origem ao ponto $(3, 2\sqrt{3})$.
6. Ache o comprimento do arco da curva $x^2 = (2y + 3)^3$ de $(1, -1)$ a $(7\sqrt{7}, 2)$.
7. Ache o comprimento do arco da curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 2$.
8. Use o Teorema 6.3.2 para encontrar o comprimento do arco da curva $y^3 = 8x^2$ do ponto $(1, 2)$ ao ponto $(27, 18)$.
9. Resolva o Exercício 8 usando o Teorema 6.3.3.
10. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{2}{3}(x - 5)^{3/2}$ do ponto onde $x = 6$ ao ponto onde $x = 8$.
11. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 3$.
12. Ache o comprimento do arco da curva $6xy = y^4 + 3$ do ponto onde $y = 1$ ao ponto onde $y = 2$.
13. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 4$.
14. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ do ponto $(2, \frac{19}{12})$ ao ponto $(5, \frac{314}{15})$.
15. Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}$ ao ponto onde $x = 1$.
16. Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (a é uma constante, $a > 1$) no primeiro quadrante do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = a$.
17. Ache o comprimento do arco da curva $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}a$ ao ponto onde $x = a$.
18. Ache o comprimento da curva $9y^2 = x^2(2x + 3)$ no segundo quadrante, do ponto onde $x = -1$ ao ponto onde $x = 0$.
19. Ache o comprimento da curva $9y^2 = x(x - 3)^2$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 3$.
20. Ache o comprimento da curva $9y^2 = 4(1 + x^2)^3$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 2\sqrt{2}$.
21. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a identidade $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ e o Teorema 5.8.1.)
22. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a do Exercício 21 e a identidade $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$.)

Nos Exercícios de 23 a 26, use a regra de Simpson com $n = 8$ para aproximar até quatro casas decimais o comprimento de arco.

23. O arco da curva seno, da origem ao ponto $(\pi, 0)$.
24. O arco da curva co-seno, da origem ao ponto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.
25. O arco da curva $y = \frac{1}{3}x^3$ da origem ao ponto $(1, \frac{1}{3})$.
26. O arco da curva $y = \operatorname{tg} x$ da origem ao ponto $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

EXERCÍCIOS 6.3 (Página 393)

1. $\sqrt{10}$ **3.** $\sqrt{97}$ **5.** $\frac{14}{3}$ **7.** $\frac{33}{16}$ **9.** $\frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$ **11.** 12 **13.** $\frac{22}{3}$ **15.** $\frac{9}{8}$ **17.** $\frac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8(a^2 - b^2)}$ se $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ se $b = a$
19. $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ **21.** 2 **23.** 3,8203 **25.** 1,0894