CÁLCULO INTEGRAL

— Prof. ADRIANO CATTAI —

04

Apostila 04: Integrais Impróprias
(*Atualizada em 4 de novembro de 2014*)

NOME: ______________________ DATA: ___/___/_____

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Apresentação

Agradeço por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas correções de digitação e na apresentação das ideias básicas para introdução dos conteúdos que pretendemos estudar. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionadas às disciplinas Cálculo II (UNEB) e Cálculo B (UFBA). Nunca esqueçam que:

✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

✓ Esta apostila é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos conteúdos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Cálculo;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria.

2 Introdução

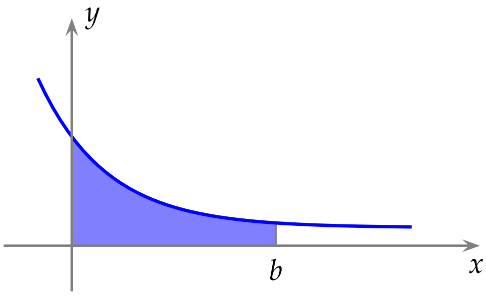
No Teorema Fundamental do Cálculo (**TFC**), os limites de integração, a e b em $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, são números reais e f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso considerar os casos em que $a=-\infty$, $b=+\infty$, ou f seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar o conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais, em que $a=-\infty$ ou $b=+\infty$ ou f é descontínua em $[a,b]$, são chamadas *Integrais Impróprias*. Nem sempre uma integral deste tipo representa um número real, isto é, nem sempre uma integral imprópria existe. Quando ela existe, seu valor é calculado levando-se em conta a generalização do conceito de integral definida.

3 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

Exemplo 1
Seja R a região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pela reta $x = 0$ (eixo-y), pela reta $y = 0$ (eixo-x) e pela reta $x = b > 0$, como mostra a figura ao lado.

◇ Determine a área de R;

◇ fazendo b crescer ilimitadamente, verifique se existe um número que represente a área da região ilimitada à direita.



Solução: Primeiramente, seja A_b (unidades de área) a área da região. Se $x \in [0, b]$, então o elemento de área é $\mathrm{d}A = e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Daí,

$$A_b = \int_0^b \mathrm{d}A = \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b}$$

Agora, se deixarmos b crescer sem limitações, então

$$A_{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1. \tag{1}$$

Ou seja, a partir de (1) afirmamos que não importa quão grande seja o valor de b, a área da região será sempre menor do que 1 unidade de área, sendo esse valor o seu limite. Escrevemos,

$$A_{+\infty} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \ldots = 1.$$

Logo, existe um número que represente a área da região indicada.

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left|\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x - 1\right| < \varepsilon.$$

Definição 1 (Integrais Impróprias com extremos infinitos)

(i) Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se esse limite existir.

(ii) Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se esse limite existir.

(iii) Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

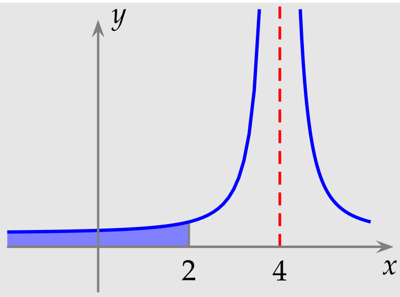
se esses limites existirem.

Pode-se mostrar, que se o limite existir, o segundo membro da equação neste último item independe da escolha de c. É comum tomar $c = 0$.

Na definição acima, se o limite existir, diremos que a integral imprópria é *convergente*, caso contrário, diremos que é *divergente*.

Exemplo 2
Estude a convergência das integrais (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2}$ e (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

Solução:
(a)



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{4-x}\bigg|_a^2\right)\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4-a}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_0^b$, em que iremos obter a primitiva $F(x)$ integrando por partes, com $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-b}-e^{-b}+1\right)\\ &= -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} - 0 + 1.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}$ é uma forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital temos:

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -0-0+1 = 1.$$

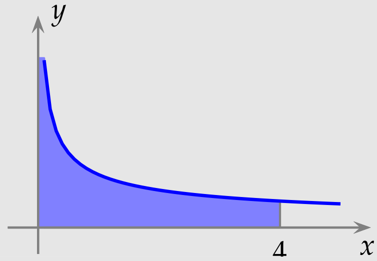
Vemos, assim, que as duas integrais convergem.

4 Outras Integrais Impróprias

Veremos outro caso de integrais impróprias. Aqui, os extremos são finitos porém, no intervalo $[a, b]$, existe algum c em que o limite de f é infinito, isto é, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$ ou ambos.

Exemplo 3
Verifique se exite algum número real que represente a área da região do plano limitada pela curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pelo eixo-x, pelo eixo-y e pela reta $x = 4$.

Solução: Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido pela integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.



Note que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, ou seja, o integrando tem uma descontinuidade infinita no extremo inferior do intervalo. Logo a integral é imprópria e sua existência é determinada da seguinte forma:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{A \to 0^+} \int_A^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{A \to 0^+} \left(2\sqrt{x}\Big|_A^4 \right) = \lim_{A \to 0^+} \left(4 - 2\sqrt{A} \right) = 4.$$

Portanto, 4 é a medida da área da região dada.

(i) Seja f uma função contínua para todo $x \in (a, b]$ tal que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

se esse limite existir.

(ii) Seja f uma função contínua para todo $x \in [a, b)$ tal que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x$$

se esse limite existir.

(iii) Seja f uma função contínua para todo $x \in [a, b]$ exceto c, em que $a < c < b$ e se $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

se esses limites existirem.

Exemplo 4
Estude a convergência da integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

Solução: O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1, ou seja, $\lim_{x\to 1} \frac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$. Portanto, pela definição que acabamos de estabelecer, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{x-1}\bigg|_0^t \right) + \lim_{s\to 1^+} \left(-\frac{1}{x-1}\bigg|_s^2 \right) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1 \right) + \lim_{s\to 1^+} \left(\frac{1}{s-1} - 1 \right) = \frac{-1}{0^-} - 1 + \frac{1}{0^+} - 1 \\
&= +\infty - 1 + \infty - 1 = +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria é divergente.

Observação 1
Se no exemplo anterior não estivéssemos notado a descontinuidade do integrando em 1, teríamos

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\bigg|_0^2 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

Esse resultado é obviamente incorreto, um vez que $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ (nunca é negativo), e então a integral de 0 a 2 nunca poderia ser um número negativo.

Exemplo 5
Verifique se a integral $\int_0^1 x \cdot \ln(x)\, dx$ converge.

Solução: O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Portanto, escrevemos

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x)\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x \cdot \ln(x)\, dx.$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \cdot \ln(x)\, dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x \cdot \ln(x)\, dx = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x\bigg|_t^1 \right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2 \cdot \ln(t) + \frac{1}{4}t^2 \right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} t^2 \cdot \ln(t)
\end{aligned}$$

Note que $\lim_{t\to 0^+} t^2 \cdot \ln(t)$ é uma indeterminação do tipo $0 \times (-\infty)$. Para calcular esse limite, escrevemos

$$t^2 \cdot \ln(t) = \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}},$$

e portanto, aplicando a regra de L'Hospital temos,

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 \cdot \ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{t^2}{2}\right) = 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx = -\frac{1}{4}.$$

5 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo B;
2. Eliana Patres / Joseph Yartey – DMAT/UFBA;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
6. Piskunov – Cálculo Diferencial e Integral.

Texto composto em LaTeX 2$_\varepsilon$, Cattai, 4 de novembro de 2014