O Cálculo com Geometria Analítica

Louis Leithold

3a Edição - Ed Harbra

6.5 CENTRÓIDE DE UMA REGIÃO PLANA

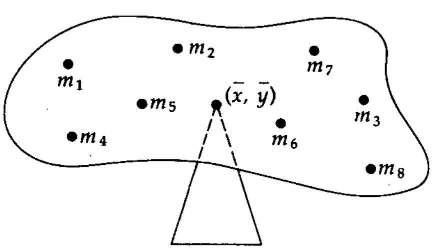


FIGURA 1

Sejam as massas de n partículas localizadas nos pontos (x_1, y_1) (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) do plano xy medidas por m_1, m_2, ..., m_n; vamos analisar o problema de encontrar o centro de massa desse sistema. Podemos imaginar as partículas sobre uma folha de peso e espessura desprezíveis e podemos supor que cada partícula tenha sua posição exatamente em um ponto. O centro de massa é o ponto onde a folha estará em equilíbrio. Consulte a Figura 1, que mostra oito partículas colocadas numa folha. A i-ésima partícula na figura será denotada por m_i que é a medida de sua massa. A folha estará em equilíbrio sobre um ponto de apoio localizado em seu centro de massa, denotado por $(\bar{x}, \bar{y})$. Para determinar o centro de massa precisamos primeiro definir o momento de massa de um sistema de partículas em relação a um eixo.

Suponhamos uma partícula a uma distância de d m de um eixo com uma massa de m kg. Se M_1 kg-m for o momento de massa da partícula em relação ao eixo, então

$$M_1 = md \tag{1}$$

Se a i-ésima partícula tendo massa m_i kg estiver localizada no ponto (x_i, y_i), sua distância ao eixo y será x_i m; assim, da fórmula (1), o momento de massa dessa partícula em relação ao eixo y é m_ix_i kg-m. Analogamente, o momento de massa da partícula em relação ao eixo x é m_iy_i kg-m. O momento do sistema de n partículas em relação ao eixo y é M_y kg-m, onde

$$\boxed{M_y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i}$$

e o momento do sistema em relação ao eixo x é M_x kg-m, onde

$$\boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i}$$

A massa total do sistema é M kg, onde

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

O centro de massa do sistema está no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pode ser interceptado como o ponto tal que, se a massa total M kg do sistema estiver concentrada nele, o seu momento de massa em relação ao eixo y, M_y kg-m, seria determinado por $M_y = M\bar{x}$, e seu momento de massa em relação ao eixo x, M_x kg-m, seria determinado por $M_x = M\bar{y}$.

EXEMPLO 1 Ache o centro de massa de quatro partículas tendo massas 2, 6, 4 e 1 kg localizadas nos pontos $(5, -2)$, $(-2, 1)$, $(0, 3)$ e $(4, -1)$, respectivamente.

Solução

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i & M_x &= \sum_{i=1}^{4} m_i y_i \\ &= 2(5) + 6(-2) + 4(0) + 1(4) & &= 2(-2) + 6(1) + 4(3) + 1(-1) \\ &= 2 & &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 2 + 6 + 4 + 1 = 13 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \tfrac{2}{13} & &= \tfrac{13}{13} \\ & & &= 1 \end{aligned}$$

O centro de massa está em $(\frac{2}{13}, 1)$.

Consideremos agora folhas finas com massa distribuída continuamente, por exemplo, folhas de papel ou de latão. Trataremos tais folhas como sendo bidimensionais e chamaremos tal região plana de *lâmina*. Nesta secção vamos restringir nossa discussão às lâminas homogêneas, isto é, lâminas com densidade superficial de massa(*) constante. Lâminas com densidade superficial de massa variável serão consideradas no Capítulo 18, em conexão com as aplicações de integrais múltiplas.

Suponhamos uma lâmina homogênea com área A m² e com massa M kg. Então, se densidade de massa por unidade de área for a constante k kg/m², $M = kA$. Se a lâmina homogênea for um retângulo, o seu centro de massa será definido como o centro do retângulo. Vamos usar essa definição para generalizá-la para lâminas homogêneas mais gerais.

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade de massa por unidade de área é a constante k kg/m², limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas

*N. do T.: A densidade superficial de massa é uma função do ponto sobre a lâmina. Essa densidade é dita constante quando tem o mesmo valor para cada ponto da lâmina.

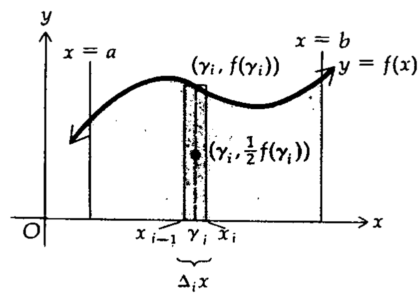


FIGURA 2

$x = a$ e $x = b$. A função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Veja a Figura 2. Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. O ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ é γ_i. Associada a cada subintervalo existe uma lâmina retangular cujo comprimento, altura e densidade superficial de massa são dados por $\Delta_i x$ m, $f(\gamma_i)$ m e k kg/m², respectivamente, e cujo centro de massa está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$. A área da lâmina retangular é $f(\gamma_i)\ \Delta_i x$ m²; logo, $kf(\gamma_i)\ \Delta_i x$ kg é sua massa. Conseqüentemente, se $\Delta_i M_y$ kg-m é o momento de massa desse elemento retangular em relação ao eixo y,

$$\Delta_i M_y = \gamma_i k f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

A soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo y é dada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} k\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

Definimos o *momento de massa de L em relação ao eixo y* como o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \to 0$. Isto está formalmente estabelecido na Definição 6.5.1.

Da mesma forma, se $\Delta_i M_x$ kg-m for o momento de massa da i-ésima lâmina retangular em relação ao eixo x,

$$\Delta_i M_x = \tfrac{1}{2} f(\gamma_i) k f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

e a soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo x é dada pela soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x$$

O limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \to 0$ está estabelecido na Definição 6.5.1 como o *momento de massa de L em relação ao eixo x.*

A massa da i-ésima lâmina retangular $kf(\gamma_i)\Delta_i x$ kg; então, a soma das medidas das massas de n lâminas retangulares é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} k f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

Na Definição 6.5.1, o limite dessa soma de Riemann está estabelecido como a *massa total de L.*

6.5.1 DEFINIÇÃO

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade superficial de massa é a constante k kg/m², a qual é limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_y kg-m for o **momento de massa da lâmina L, em relação ao eixo y**, então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

$$= k\int_a^b x f(x)\, dx$$

Se M_x kg-m for o **momento de massa da lâmina L em relação ao eixo x**, então

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}k[f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$$
$$= \tfrac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Se M kg for a **massa total da lâmina L**, então

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\gamma_i)\,\Delta_i x$$
$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ for o **centro de massa da lâmina L**, então

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \tag{2}$$

Substituindo as expressões para M_x, M_y e M em (2), teremos

$$\bar{x} = \frac{k\int_a^b xf(x)\,dx}{k\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}k\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{k\int_a^b f(x)\,dx}$$

Dividindo ambos o numerador e o denominador por k, teremos

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Nessas fórmulas o denominador é o número de unidades quadradas na área da região; desta forma, expressamos um problema físico em termos de um problema geométrico. Isto é, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ podem ser considerados como a abscissa e a ordenada médias, respectivamente, de uma região geométrica. Nesse caso, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ dependem somente da região, e não da massa da lâmina. Assim sendo, vamos nos referir ao centro de massa de uma região plana, em vez de falarmos em centro de massa de uma lâmina homogênea. Nesse caso, o centro de massa será chamado de *centróide* da região. Em vez de momentos de massa, vamos considerar momentos da região.

6.5.2 DEFINIÇÃO

Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_x denotar o **momento de R em relação ao eixo x** e M_y denotar o **momento de R em relação ao eixo y**, então

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x \qquad M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(\gamma_i)\,\Delta_i x$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx \qquad\qquad = \int_a^b xf(x)\,dx$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ for o **centróide** da região plana R cuja área é A unidades quadradas e M_x e M_y forem definidos como acima,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

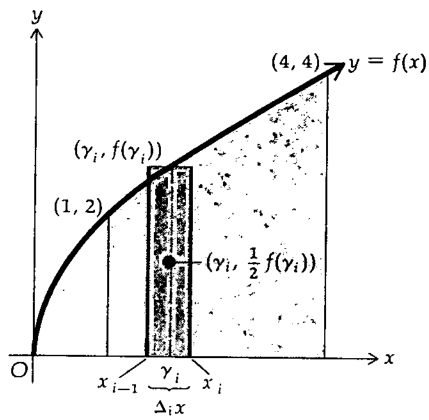


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache o centróide da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y^2 = 4x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução Seja $f(x) = 2x^{1/2}$. A equação da curva é, então, $y = f(x)$. A Figura 3 mostra a região, bem como o i-ésimo elemento retangular. O centróide do retângulo está em $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$. A área A unidades quadradas da região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^4 f(x)\, dx \\ &= \int_1^4 2x^{1/2}\, dx \\ &= \tfrac{4}{3}x^{3/2}\Big]_1^4 \\ &= \tfrac{28}{3} \end{aligned}$$

Agora vamos calcular M_y e M_x.

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(\gamma_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^4 x f(x)\, dx \\ &= \int_1^4 x(2x^{1/2})\, dx \\ &= 2\int_1^4 x^{3/2}\, dx \\ &= \tfrac{4}{5}x^{5/2}\Big]_1^4 \\ &= \tfrac{124}{5} \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}f(\gamma_i) \cdot f(\gamma_i)\, \Delta_i x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 [f(x)]^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 4x\, dx \\ &= x^2\Big]_1^4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} \\ &= \frac{\frac{124}{5}}{\frac{28}{3}} \\ &= \frac{93}{35} \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{15}{\frac{28}{3}} \\ &= \frac{45}{28} \end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(\frac{93}{35}, \frac{45}{28})$.

No exemplo a seguir, a região é limitada por duas curvas, ao invés de uma e um eixo coordenado. O método para encontrarmos o centróide é o mesmo, mas as equações para M_x e M_y dependem das equações que definem as duas curvas. O procedimento a ser seguido está no exemplo.

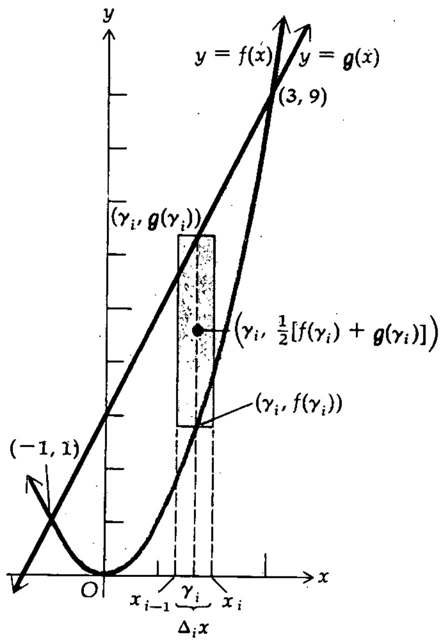


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Ache o centróide da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção das duas curvas são $(-1, 1)$ e $(3, 9)$. A região está na Figura 4, bem como o i-ésimo elemento retangular.

Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$. O centróide do i-ésimo elemento retangular está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}[f(\gamma_i) + g(\gamma_i)])$, onde γ_i é o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A medida da área da região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} [2x + 3 - x^2]\, dx \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

Vamos calcular M_y e M_x.

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{3} x[g(x) - f(x)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} x[2x + 3 - x^2]\, dx \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[g(\gamma_i) + f(\gamma_i)][g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\, \Delta_i x \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{3} [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)] dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{3} [2x + 3 + x^2][2x + 3 - x^2]\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{3} [4x^2 + 12x + 9 - x^4]\, dx \\ &= \tfrac{544}{15} \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

$$= \frac{\frac{32}{3}}{\frac{32}{3}} \qquad = \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}}$$

$$= 1 \qquad = \tfrac{17}{5}$$

Assim sendo, o centróide está no ponto $(1, \frac{17}{5})$.

6.5.3 TEOREMA Se a região plana R tiver a reta L como um eixo de simetria, o centróide de R estará em L.

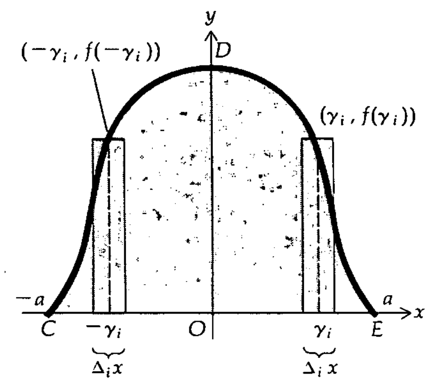


FIGURA 5

Prova Escolha os eixos coordenados de tal forma que L esteja sobre o eixo y e a origem esteja em R. A Figura 5 ilustra um exemplo desta situação. Na figura, R é a região CDE, C é o ponto $(-a, 0)$, E é $(a, 0)$ e a equação da curva CDE é $y = f(x)$.

Consideremos uma partição do intervalo $[0, a]$. Seja γ_i o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. O momento em relação ao eixo y do elemento retangular com altura $f(\gamma_i)$ e comprimento $\Delta_i x$ é $\gamma_i[f(\gamma_i)\ \Delta_i x]$. Dada a simetria, para uma partição similar do intervalo $[-a, 0]$ existe um elemento correspondente tendo $-\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$ como seu momento em relação ao eixo y. A soma desses dois momentos é 0; logo $M_y = 0$. Como $\bar{x} = M_y/A$, concluímos que $\bar{x} = 0$. Assim o centróide da região R está no eixo y e isso é o que queríamos provar. ■

Com a aplicação do Teorema 6.5.3 torna-se mais simples encontrar o centróide de uma região plana que pode, assim, ser dividida em regiões com eixos de simetria.

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e pelo eixo x.

Solução A região está na Figura 6.

Como o eixo y é um eixo de simetria, o centróide está sobre o eixo y; assim, $\bar{x} = 0$.

O momento da região em relação ao eixo x é dado por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\sqrt{4 - \gamma_i^2}]^2\ \Delta_i x \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)\, dx \\ &= 4x - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_0^2 \\ &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

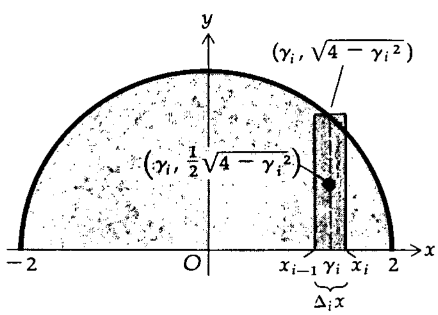


FIGURA 6

A área da região é 2π unidades quadradas; assim,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\frac{16}{3}}{2\pi} \\ &= \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

O centróide está no ponto $(0, \frac{8}{3\pi})$.

EXERCÍCIOS 6.5

1. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 1, 2 e 3 kg e localizadas nos pontos $(-1, 3)$, $(2, 1)$ e $(3, -1)$, respectivamente.
2. Ache o centro de massa das quatro partículas tendo massas de 2, 3, 3 e 4 kg e localizadas nos pontos $(-1, -2)$, $(1, 3)$, $(0, 5)$ e $(2, 1)$, respectivamente.
3. A coordenada y do centro de massa de quatro partículas é 5. As partículas têm massas 2, 5, 4 e m kg e estão localizadas nos pontos $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 20)$ e $(2, -2)$, respectivamente. Ache m.

4. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 3, 7 e 2 kg localizadas nos pontos (2, 3), (−1, 4) e (0, 2), respectivamente.
5. Ache o centro de massa de três partículas de igual massa localizadas em (4, −2), (−3, 0) e (1, 5).
6. Prove que o centro de massa de três partículas com igual massa num plano está no ponto de intersecção das medianas do triângulo cujos vértices são os pontos onde estão as partículas.

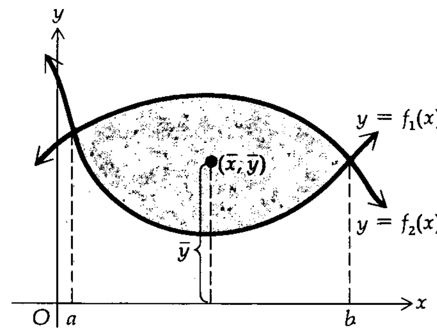
Nos Exercícios de 7 a 14, ache o centróide da região com os contornos indicados.

7. A parábola $y = 4 - x^2$ e o eixo x.
8. A parábola $x = 2y - y^2$ e o eixo y.
9. A parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$.
10. A parábola $y^2 = 4x$, o eixo y e a reta $y = 4$.
11. As curvas $y = x^3$ e $y = 4x$ no primeiro quadrante.
12. As retas $y = 2x + 1$, $x + y = 7$, e $x = 8$.
13. As curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 2x - x^2$.
14. As curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

15. Ache o centro de massa da lâmina limitada pela parábola $2y^2 = 18 - 3x$, pelo eixo y, se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for $\sqrt{6 - x}$ kg/m².
16. Resolva o Exercício 15 se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for x kg/m².
17. Se o centróide da região limitada pela parábola $y^2 = 4px$ e pela reta $x = a$ estiver no ponto $(p, 0)$, ache o valor de a.
18. Prove que a distância do centróide de um triângulo a qualquer lado do triângulo é igual a um terço da altura daquele lado.
19. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ (veja a figura). Se A for a medida da área de R e $\bar{y}$ for a ordenada do centróide de R, prove que a medida do volume V do sólido de revolução obtidos ao girarmos R em torno do eixo x é dada por $V = 2\pi\bar{y}A$. Enunciando esta igualdade temos que:

Se uma região plana girar em torno de um reta em seu plano que não corta a região, então, a medida do volume do sólido de revolução gerado será igual ao produto da medida da área da região pela medida da distância percorrida pelo centróide da região.

O enunciado acima é conhecido como o *teorema de Pappus* para volumes de sólidos de revolução.



20. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume do toro (da forma de uma câmara de ar) gerado com a revolução de um círculo com um raio de r unidades em torno de uma reta em seu plano, a uma distância de b unidades de seu centro, onde $b > r$.
21. Use o teorema de Pappus para encontrar o centróide da região limitada por um semicírculo e seu diâmetro.
22. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de uma esfera com um raio de r unidades.
23. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de um cone circular reto com raio da base r unidades e altura h unidades.
24. Seja R a região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x. Use o teorema de Pappus para encontrar o momento de R em relação à reta $y = -r$.
25. Se R for a região do Exercício 24, use o teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido de revolução gerado com a revolução de R em torno da reta $x - y = r$. (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 4.6 nos Exercícios 4.8.)
26. Dê um exemplo para mostrar que o centróide de uma região plana não é necessariamente um ponto dentro da região.

6.6 TRABALHO

O *trabalho* realizado por uma força atuando sobre um objeto é definido em Física como sendo "a intensidade da força vezes o deslocamento". Por exemplo, suponha que um objeto se mova ao longo do eixo x, de um ponto a até um ponto b e sobre o objeto esteja agindo uma força de F newtons na direção do movimento. Então, se o deslocamento for medido em metros, $(b - a)$ será o número de metros no deslocamento. Se W for o número de unidades do trabalho realizado pela força, W será definido por

$$\boxed{W = F(b - a)} \tag{1}$$

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se W for o trabalho necessário para levantar uma massa de 70 kg a uma altura de 3 m, então

$$W = 70 \cdot 3 = 210$$

onde a aceleração foi considerada igual a 1. ◄

EXERCÍCIOS 6.2 (Página 387)

13. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{3}{10}\pi$ unidades cúb. **17.** $\frac{5}{6}\pi$ unidades cúb. **19.** $\frac{49}{30}\pi$ unidades cúb. **21.** 16π unidades cúb.
23. $\frac{512}{15}\pi$ unidades cúb. **25.** $\frac{32}{15}\pi p^3$ unidades cúb. **27.** $\frac{8}{5}\pi$ unidades cúb. **29.** $\frac{11}{10}\pi$ unidades cúb. **31.** $\frac{38}{15}\pi$ unidades cúb.
33. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{32}{15}\pi$ unidades cúb. **37.** $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\pi$ unidades cúb. **39.** π unidades cúb. **41.** $\frac{224}{3}\pi$ unidades cúb. **43.** $\sqrt[7]{2.744}$

EXERCÍCIOS 6.3 (Página 393)

1. $\sqrt{10}$ **3.** $\sqrt{97}$ **5.** $\frac{14}{3}$ **7.** $\frac{33}{16}$ **9.** $\frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$ **11.** 12 **13.** $\frac{22}{3}$ **15.** $\frac{9}{8}$ **17.** $\dfrac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8(a^2 - b^2)}$ se $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ se $b = a$
19. $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ **21.** 2 **23.** 3,8203 **25.** 1,0894

EXERCÍCIOS 6.4 (Página 399)

1. 250 dinas **3.** 4.000 dinas **5.** $\frac{3}{2}$ m/s^2 **7.** $\frac{8}{3}$ kg **9.** 4 **11.** 6 **13.** 54 kg; $\frac{11}{3}$ m a partir de um extremo
15. 171 g; 5,92 mm a partir de um extremo **17.** 42 g; $\frac{44}{7}$ cm a partir de um extremo
19. 31,5 kg; $\frac{18}{7}$ m a partir do extremo com a maior densidade **21.** 16 kg; $\frac{16}{5}$ m a partir de um extremo
23. 1,2 m a partir do extremo com a maior densidade **25.** $\dfrac{20}{L^2}x^2$ g/cm **27.** 12 kg/m

EXERCÍCIOS 6.5 (Página 406)

1. $(2, \frac{1}{3})$ **3.** $\frac{29}{7}$ **5.** $(\frac{2}{3}, 1)$ **7.** $(0, \frac{8}{5})$ **9.** $(0, \frac{12}{5})$ **11.** $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$ **13.** $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ **15.** (2, 0) **17.** $\frac{5}{3}p$
21. O ponto no raio cuja distância do centro da circunferência é $\dfrac{4}{3\pi}$ vezes o raio.
23. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ unidades cúb. **25.** $\frac{1}{6}\sqrt{2}(4 + 3\pi)\pi r^3$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 6.6 (Página 412)

1. $\frac{158}{3}$ J **3.** $\frac{1.076}{15}$ ergs **5.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{393})$ **7.** 180 ergs **9.** 8 J **11.** 1.350 ergs **13.** 6.562,5w J
15. $256\pi w$ J **17.** 13.500 J **19.** 5.500 J **21.** $9.196.875\pi$ J **23.** $1.017.938\pi$ J **25.** $\dfrac{144w}{55}$ s **27.** $2\sqrt{3}$ cm

EXERCÍCIOS 6.7 (Página 417)

1. $320\rho g$ dinas **3.** $64\rho g$ N **5.** $2{,}25\rho g$ dinas **7.** 941.760 N **9.** 4.087.500 N **11.** $\sqrt[3]{16{,}31}$ m $\approx$ 2,54 m **15.** $14.000\rho g$ N
17. $100.000\rho g$ kg-m **19.** 12.978 N **21.** $250\sqrt{409}\rho g$ N **23.** $11.250\sqrt{3}\rho g$ N

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6 (Página 418)

1. $\frac{1}{9}\pi$ unidades cúb. **3.** π unidades cúb. **5.** π unidades cúb. **7.** 250π unidades cúb. **9.** 1.024 unidades cúb. **11.** 3π unidades cúb.
13. $\frac{25}{6}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ **17.** 558π cm^3 **19.** $\frac{1}{5.320}[\frac{1}{8}(10.999)^{3/2} - (2.251)^{3/2}] \approx 7{,}03$ **21.** $\frac{2}{13}$ **23.** $(\frac{3}{2}, 2)$
25. $\frac{104}{3}$ kg; $\frac{298}{65}$ m do extremo esquerdo **27.** $(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$ **29.** $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ **31.** $\frac{256}{3}\pi$ m^3 **33.** $\frac{128}{15}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{1.539}{20}\pi$ unidades cúb.
37. 6.000 ergs **39.** 400 joules **41.** 44.145.000 joules **43.** $\frac{2.752}{3}w\pi$ joules **45.** 4,5 $w\pi$J **47.** 90 m^3 **49.** $\frac{832}{3}\pi$ unidades cúb.
51. $\frac{1}{4}\pi^2$ unidades cúb. **53.** $\frac{18}{5}\rho g$ N **55.** $\frac{82.048}{3}$N

EXERCÍCIOS 7.1 (Página 430)

1. biunívoca **3.** não é biunívoca **5.** biunívoca **7.** biunívoca **9.** biunívoca **11.** biunívoca **13.** biunívoca
15. biunívoca **17.** não é biunívoca **19.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 7)$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **21.** não tem inversa