UNEB – DCET I – Licenciatura em Química – 2013.2 – Cálculo II

Integral Dupla: Uma Pura Diversão

1. Calcule $\iint_R f(x,y)\,dA$, sendo:

a) $f(x,y) = xe^{xy}$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x \le 3 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$.

b) $f(x,y) = x\cos(xy)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 0 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le \pi/2\}$.

c) $f(x,y) = y\ln(x)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x \le 3 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$.

d) $f(x,y) = 1/(x+y)$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x \le 2 \text{ e } 1 \le y \le 2\}$.

e) $f(x,y) = \dfrac{y\ln x}{x}$; $\quad R = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x \le 2 \text{ e } -1 \le y \le 1\}$.

2. Esboce a região de integração e calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} (2x+4y)\,dydx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-y}^{y} (xy^2+x)\,dxdy$ c) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln(x)}^{1} x\,dydx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dxdy$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,dydx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^{|x|} (x^2-2y^2)\,dydx$

3. Esboce a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\,dxdy$ b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dydx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dydx$

4. Calcule:

a) $\iint_R (8-x-y)\,dxdy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

b) $\iint_R x\,dA$, sendo R a região interior ao círculo de centro na origem e de raio 2 e acima da reta $y = 1$, no 1º quadrante.

c) $\iint_R (x+y)\,dxdy$, onde *R* é a região delimitada por $y = x^2+1$, $y = -x^2-1$, $x = -1$ e $x = 1$.

d) $\iint_R (x+y)\,dxdy$, onde *R* é a região hachurada na figura 1.

e) $\iint_R e^{x^2}\,dxdy$, onde *R* é a região hachurada na figura 2.

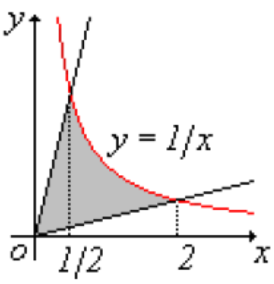


Figura 1.

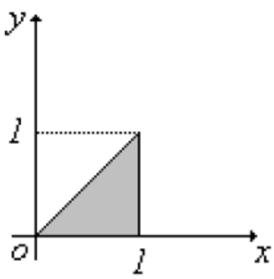


Figura 2.

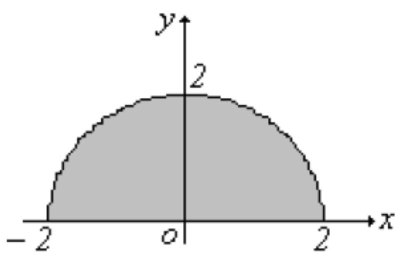


Figura 3.

5. Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais:

a) $\iint_R \left(x^2+y^2\right)^2 \, dxdy$, onde R é a região hachurada na figura 3 acima.

b) $\iint_R (8-x-y)\, dxdy$, sendo R delimitada por $x^2+y^2=1$. Interprete geometricamente.

c) $\iint_R \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy$, sendo R o anel delimitado por $x^2+y^2=16$ e $x^2+y^2=25$.

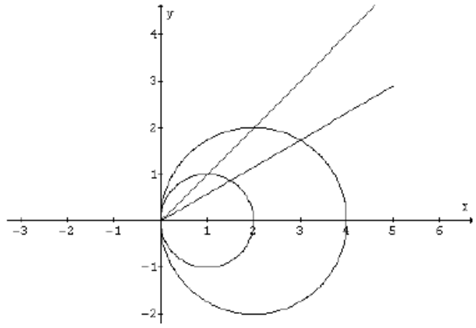
d) $\iint_R e^{2\left(x^2+y^2\right)} \, dxdy$, sendo R o círculo $x^2+y^2 \le 4$.

e) $\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, sendo R a região limitada pelas curvas

$r = 2\cos\theta$ (círculo de centro em (1,0) e raio 1);

$r = 4\cos\theta$ (círculo de centro em (2,0) e raio 2);

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4}$



6. Calcule o volume dos seguintes sólidos:

a) Sólido acima do plano *xy* delimitado pelo parabolóide $z = 4-2x^2-2y^2$. Esboce o sólido.

b) Sólido acima do plano *xy* delimitado lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e superiormente pelo parabolóide $z = x^2+y^2$. Esboce o sólido.

c) O tetraedro limitado no 1º octante pelo plano de equação $\dfrac{z}{3}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}=1$

d) Sólido limitado inferiormente pelo plano xy, lateralmente por $x^2+y^2=4$ e superiormente por $y+z=8$.

e) Sólido acima do plano XY limitado pelo parabolóide $z = 4-2x^2-2y^2$ e pelo plano $z = 2$.

f) Sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $z = 8-x^2-y^2$.

7. Calcule, usando *integral dupla*, a área da região *R* delimitada pelas curvas abaixo. Esboce os gráficos:

a) $y = x^3, y = -x+2$ e $y = 0$.

b) exterior ao círculo $r = 2$ e interior ao círculo $r = 4\cos\theta$ (centro em (2,0) e raio 2);

Respostas

1. a) e^3-e-2 b) $4/\pi$ c) $(3/2)\ln 3 - 1$ d) $10\ln(2)-6\ln(3)$; e) 0

2. a) 8/3; b) 0; c) $\left(e^2/4\right)-(3/4)$; d) 1/3; e) 0; f) $-1/2$

3. a) $\int_0^2 \int_{2x}^4 f(x,y)\,dydx$ b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dxdy$ c) $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\,dxdy + \int_2^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y)\,dxdy$

4. a) 896/15 b) 5/6 c) 0 d) 2 e) (e -1)/2

5. a) $32\pi/3$; b) 8π. (Volume do tronco de um cilindro reto de raio de base 1 e limitado superiormente pelo plano de equação $z = 8-x-y$); c) $2\pi[25\ln(5) - 32\ln(2) - (9/2)]$;
d) $(\pi/2)\left(e^8-1\right)$ e) $\dfrac{7}{9}(10\sqrt{2}-11)$

6. a) 4π u.v; b) $\pi/2$ u.v; c) 1 u.v. d) 32π u.v. e) π u.v. f) 16π u.v.

7. a) 3/4 u.a. b) $(\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3})$u.a. 8. a) $\dfrac{81k\pi}{2}$ b) $11{,}7k$. 9. a) 39/2; b) $-1/12$;