Algumas Equivalencias do Axioma da Escolha

Elen Deise Assis Barbosa

Orientador: Prof. Ms. Luís Roque Rodrigues de Jesus

Universidade do Estado da Bahia — UNEB

27 de outubro de 2009

Índice

Postulados de Peano

Existem um conjunto N e uma função $s : N \longrightarrow N$ tais que:
(i) s é injetiva;
(ii) $\exists\ 0 \in N / Im(s) = N - \{0\}$;
(iii) Se $X \in N, 0 \in N \wedge (\forall n)(n \in X)$ então $X = N$.

Axiomas de Zermelo -Fraenkel (ZF)

(1) Axioma da Extensionalidade
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in x \iff z \in y)$
(2) Axioma do Vazio
$(\exists y)(\forall x)(x \in y)$
(3) Axioma da Separação
$(\exists y)(\forall x)(x \in y \iff x \in z \wedge \varphi(x))$, onde $\varphi(x)$ é uma sentença na qual y não ocorre livre
(4) Axioma do Par
$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \iff w = x \vee w = y)$
(5) Axioma da União
$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \iff (\exists w)(w \in x \wedge z \in w))$

Axiomas de Zermelo -Fraenkel (ZF)

(6) Axioma das Partes
$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \iff z \subseteq x)$
(7) Axioma do Infinito
$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Longrightarrow s(y) \in x))$ onde
$s(y) = y \cup \{y\}$.(sucessor de y)
(8) Axioma da Substituição
$(\forall w)(\forall x)(x \in w, y : \varphi(x,y) \Longrightarrow (\exists z)(\forall y)(y \in z \iff (\exists x)$
$(x \in w\varphi(x,y))))$
(9) Axioma da Regularidade
$(\forall x)(x \neq \varnothing \Longrightarrow (\exists y)(y \in x \wedge \sim (\exists z)(z \in x \wedge z \in y)))$
(10) Axioma da Escolha
$((\forall x)(x \in z \Longrightarrow x \neq 0) \wedge (\forall x)(\forall y)(((x, y \in z) \wedge (x \neq y)) \Longrightarrow$
$x \cap y = \varnothing)) \Longrightarrow (\exists u)(\forall x)(\exists v)(x \in z \Longrightarrow u \cap x = \{v\})$

Números Naturais

Definição 1

Para quaisquer conjunto a, o sucessor a^+ é definido por,

$$a^+ = a \cup \{a\}.$$

Teorema 1

Existe um conjunto indutivo minimal.

Prova

- O Axioma da Infinidade garante a existência de um conjunto indutivo. Pelos Axiomas das Partes e da Separação, existe o conjunto
$$\mathcal{C} = \{x, x \in \mathcal{P}(a) \wedge xeindutivo\}$$

Números Naturais

- $\mathcal{C} \neq \varnothing$ pois $a \in \mathcal{C}$. Chamemos $\omega = \cap \mathcal{C}$. Seja ω' um conjunto indutivo. Então,$\omega' \cap a$ também é um conjunto indutivo. Temos,

$$\omega' \cap a \subseteq a \Longrightarrow \omega' \cap a \in \mathcal{P}(a) \Longrightarrow$$

$$\omega' \cap a \in \mathcal{C} \Longrightarrow \omega \subseteq \omega' \cap a \subseteq \omega' \Longrightarrow \omega \subseteq \omega'.$$

Números Naturais

- $\mathcal{C} \neq \varnothing$ pois $a \in \mathcal{C}$. Chamemos $\omega = \cap\mathcal{C}$. Seja ω' um conjunto indutivo. Então,$\omega' \cap a$ também é um conjunto indutivo. Temos,
$$\omega' \cap a \subseteq a \Longrightarrow \omega' \cap a \in \mathcal{P}(a) \Longrightarrow$$
$$\omega' \cap a \in \mathcal{C} \Longrightarrow \omega \subseteq \omega' \cap a \subseteq \omega' \Longrightarrow \omega \subseteq \omega'.$$

Números Naturais

Corolário (Princípio da Indução)

Se S é um subconjunto indutivo de ω, então $S = \omega$.

Prova

- Temos que $S \subseteq \omega$. Do Teorema 1, $\omega \subseteq S$. Logo, $S = \omega$.
- Definamos,

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing && (1)\\ 1 &= 0^{+} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} && (2)\\ 2 &= 1^{+} = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = && (3)\\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} && (4)\\ &= \{0, 1\} && (5) \end{aligned}$$

E assim sucessivamente.

Números Naturais

Corolário (Princípio da Indução)

Se S é um subconjunto indutivo de ω, então $S = \omega$.

Prova

- Temos que $S \subseteq \omega$. Do Teorema 1, $\omega \subseteq S$. Logo, $S = \omega$.
- Definamos,

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing && (1)\\
1 &= 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} && (2)\\
2 &= 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = && (3)\\
&= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} && (4)\\
&= \{0, 1\} && (5)
\end{aligned}
$$

E assim sucessivamente.

Números Naturais

Daí, temos:

$$0 \in 1 \in 2 \in ...e 0 \subset 1 \subset 2 \subset ...$$

Teorema 2

(1) $n \in \omega - \{0\} \implies (\exists m)(m \in \omega \wedge n = m^+)$;
(2)Todo elemento de ω é transitivo;
(3)ω é transitivo;
(4) $(n \in \omega \wedge m \in n) \implies nnaoestacontidioemm$. Em particular, $nnaopertencean; \forall n \in \omega$;
(5)$(m, n \in \omega \wedge m^+ = n^+) \implies m = n$.

Números Naturais

Prova

(1)Provemos por indução. Seja
$S = \{0\} \cup \{n : n \in \omega \wedge (\exists m)(m \in \omega \wedge m = n_{+})\}$. $S \subseteq \omega$ $0 \in S$
$n \in S \Longrightarrow n^{+} \in S$
Logo, S é indutivo e, portanto, $S = \omega$
$n \in \omega - \{0\} \Longrightarrow \in S = \{0\} \cup \{n : n \in \omega \wedge (\exists m)(m \in \omega \wedge n = m^{+})\}$
Como $n \neq 0$, então existe $n \in \omega$ tal que $n = m^{+}$. Isto nos mostra que qualquer natural diferente de zero é sucessor de algum natural.
(2)Ok!
(3)Ok!
(4)Ok!
(5) Suponhamos que $m \neq n$.

$$m \in m^{+} = n^{+} \Longrightarrow m \in n^{+} \Longrightarrow m \in n \vee m = n$$

Como $m \neq n$, então $m \in n$.

Números Naturais

Por outro lado,

$$n \in n^{+} = m^{+} \Longrightarrow n \in m^{+} \Longrightarrow n \in m \vee m = n.$$

Daí, $n \in m$.
De (2) temos que $n \subset m$, e então $m \in m$. Absurdo! Logo, $m = n$.

Números Naturais

Definição 2

Um conjunto a é dito transitivo se, e somente se,

$$x \in y \in a \Longrightarrow x \in a.$$

Teorema3

$< \omega, \tau, \sigma >$ é um sistema de Peano.

Teorema de Recursão

Teorema (Recursão sobre ω)

Seja a um conjunto não vazio, $b \in a$ e $f : a \longrightarrow a$. Então existe uma única função $u : \omega \longrightarrow a$ tal que $u(0) = a$ e $u(n_+) = f(u(n))$.

Unicidade de um Sistema de Peano

Prova

Mostremos que f é injetiva.
Seja

$$T = \{n : n \in \omega \wedge (\forall m)(m \in \omega \wedge m \neq x \Longrightarrow f(m) \neq f(n))\}$$

Fazendo indução sobre T, temos $T = \omega$.
Logo, fé injetiva.

$$\therefore < N, S, e > \simeq < \omega, \tau, \sigma >$$