



MODELAGEM MATEMÁTICA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA.

Jaíra de Souza Gomes Bispo
UNEB – Campus II
jairasou@yahoo.com.br

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

**“Ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”
(BARBOSA, 2003).**

Autores como Bassanezi (2004), Biembengut e Hein (2005), Bean (2001) e Barbosa (2003) apresentam alguns exemplos de modelagem matemática em seus textos.

CASOS DE MODELAGEM, SEGUNDO Barbosa (2003)

- **CASO 1**

O problema é apresentado pelo professor com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos fazerem a investigação, com a mediação do professor durante todo o processo;

- **CASO 2**

Os alunos se deparam com um problema que para ser investigado precisam coletar dados, organizá-los e apresentá-los, com a ajuda do professor;

- **CASO 3**

Trata de projetos desenvolvidos a partir de temas não-matemáticos que podem ser “escolhidos” pelos professores e alunos (existe um acordo entre professor e aluno). Neste caso, o professor faz um convite aos alunos para que participem do “projeto de Modelagem”.

ETAPAS DE MODELAGEM

Projeto de Modelagem

- escolha do tema;
- pesquisa exploratória;
- levantamento dos problemas;
- resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema;
- análise crítica da(s) solução(s) e validação

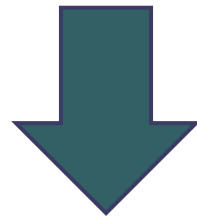


HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

- Recurso Pedagógico.
- Aumentar o interesse do aluno pela matemática – Matemática faz parte da cultura humana.

Caso 2 de modelagem:

quando os alunos se deparam com um problema para ser investigado precisam coletar dados, organizá-los e apresentá-los, com a ajuda do professor.



Construção do conhecimento matemático através dos tempos.

RAZÕES QUE FAVORECEM A UNIÃO DA MATEMÁTICA E SUA HISTÓRIA NUM CONTEXTO PEDAGÓGICO:

Mendes, Fossa e Valdés (2006):

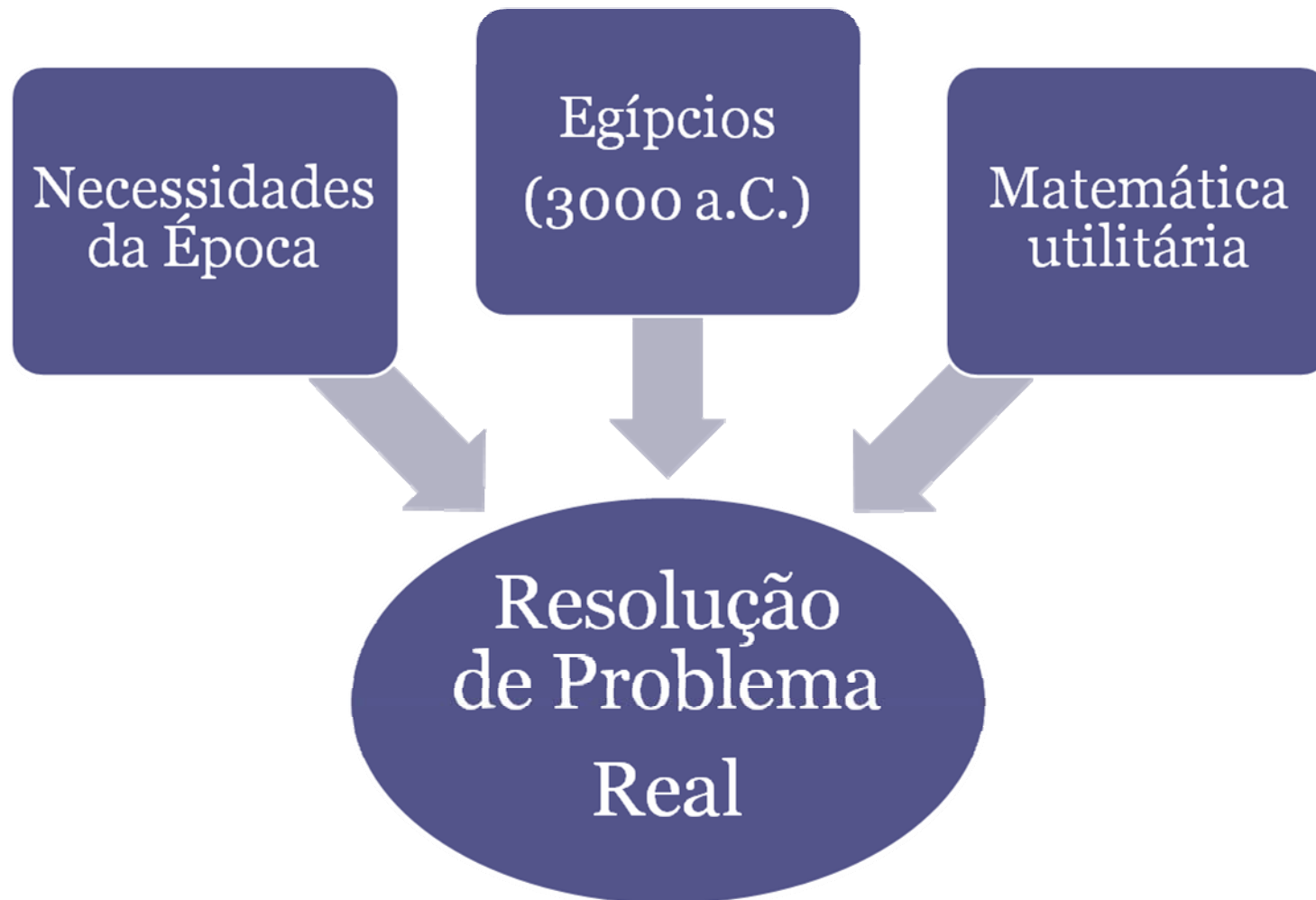
“... a produção do conhecimento matemático no decorrer do desenvolvimento construtivo (sua história) caracteriza-se por uma constante criação e organização formal de códigos representativos da interpretação de situações cotidianas vivenciadas pela sociedade (modelos), passando, assim, a ser considerada como um conhecimento verdadeiro.”

A MODELAGEM MATEMÁTICA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A invenção da roda pelos sumérios no ano 3000 a.C. Foi um dos primeiros modelos matemáticos produzidos pela humanidade.



Observaram um tronco de árvore rolando por um declive e tiveram a idéia de transportar cargas pesadas colocando-as sobre objetos rolantes.





MANIFESTAÇÕES DA MODELAGEM ATRAVÉS DOS GRANDES CIENTISTAS AO LONGO DA HISTÓRIA.

Tales de Mileto (639–568 a.C.), filósofo grego:

Semelhança de triângulos X altura das pirâmides

Pitágoras (570 –500 a.C.), filósofo grego:

Modelo matemático para a música -
comprimento das cordas vibratórias produzem
ondas sonoras em mútua harmonia.



Arquimedes (287 – 212 a.C.), matemático e físico grego:

Modelo que combina as deduções matemáticas com resultados das experiências – Leis fundamentais da estática.

Ex: o princípio da alavanca e da balança.

René Descartes (1596 – 1650), físico, matemático e filósofo francês:

Modelo no qual reconhece as relações entre as equações algébricas e os lugares geométricos.

Álgebra X Geometria



Issac Newton (1642 – 1726),
matemático e filósofo inglês:

Cálculo X Teoria da Gravitação Universal.

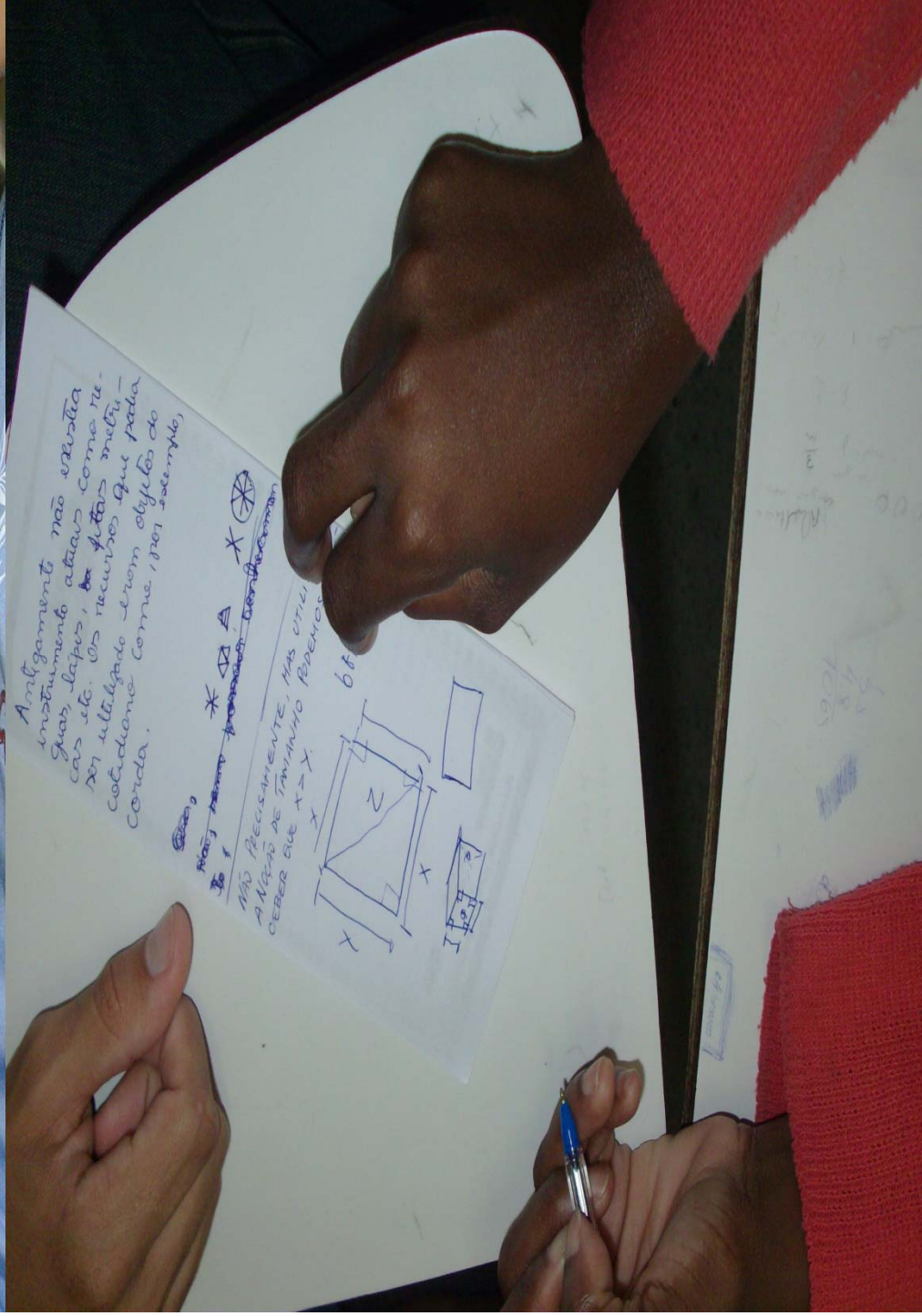
Modelo Matemático - séc. XIX

O termo modelo matemático somente foi introduzido no século XIX, por Lobachewsky (1792 – 1856), matemático russo e Riemann (1826 – 1866), matemático alemão, que criaram os modelos propostos pelas geometrias não-euclidianas.

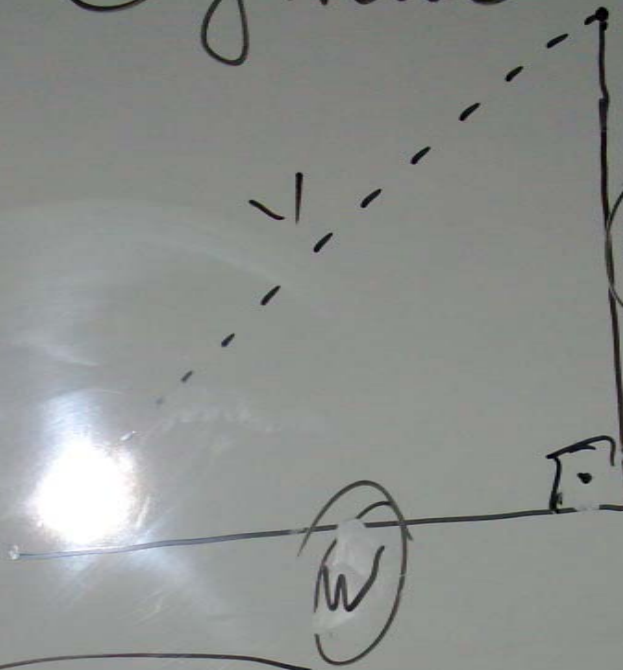
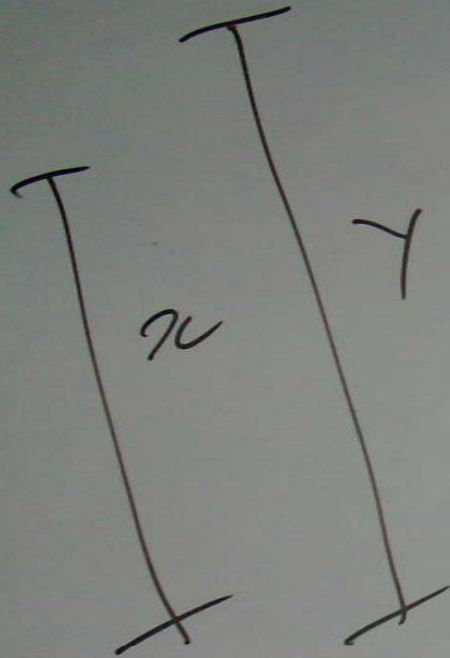


Problema 01

**Podemos determinar a altura de
uma pessoa sem utilizar,
inicialmente, os instrumentos
de medida?**



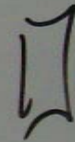
table/same (y) same (x) same (z)



$$y = 40$$

$$x =$$

$$w = 40$$



$$y^2 = w^2 + x^2$$

$$x^2 + x^2 = y^2$$

$$2x^2 = y^2$$

$$y = x\sqrt{2}$$

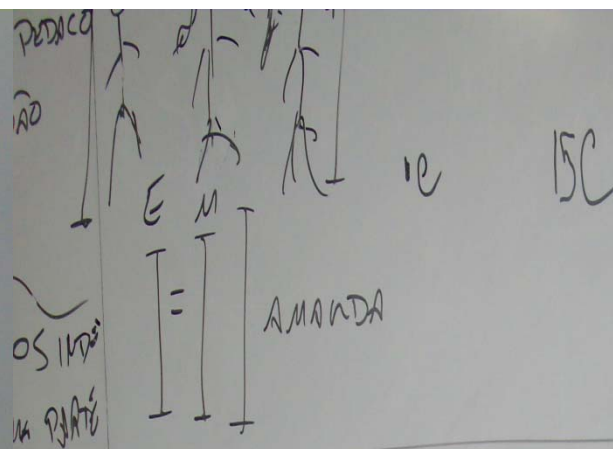
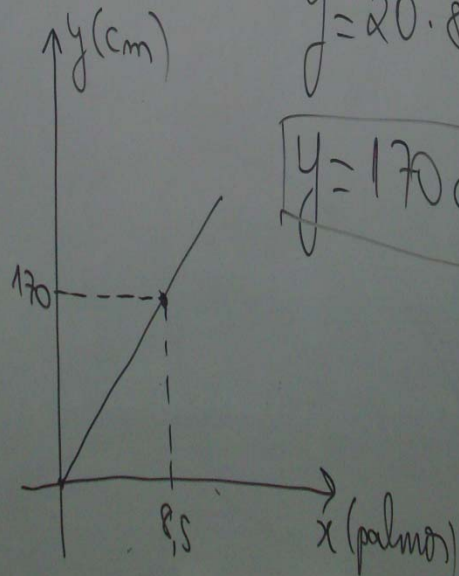
$$y = 40\sqrt{2}$$

$x = \text{n}^\circ \text{ de palmos obtidos no cordão}$

$y = \text{medida em cm}$

$$\begin{cases} x = 8,5 \text{ palmos} & y = 20x \\ & y = 20 \cdot 8,5 \end{cases}$$

$$y = 170 \text{ cm}$$



TAMANHO REAL
SOMBRA - GRRAFA → 35cm
" VANISE → 190
→ V

$$\frac{V}{1,90} = \frac{0,35}{0,40}$$

$$V = \frac{0,35 \times 1,90}{0,40} \approx 1,66 \text{ m}$$

- PALMA DA MÃO

1 PALMO DE MÃO = 22 cm

8 PALMOS = 1,75 m

$y = \text{ALTURA}$ $y = f(x)$

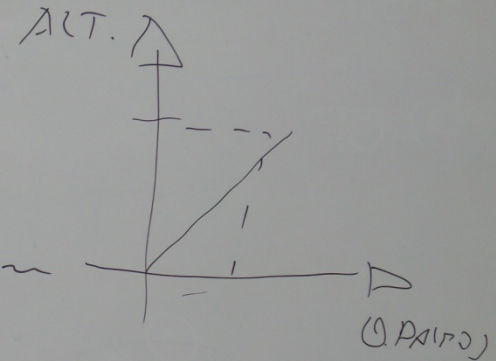
$x = 0 \text{ PALMOS}$

A MÃO

MÃO = 22 cm

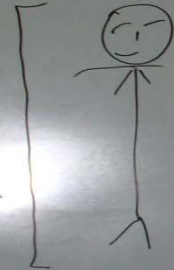
1,75 m

$y = f(x)$



1. Palmo = 10 polegares

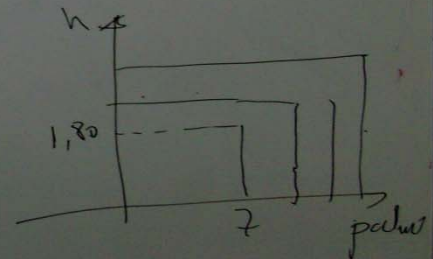
7 palmos, 13 pol.



$h = n \cdot \text{polegadas}$

$$h = 7 \cdot 2,5 + 3$$

$$h = 1,80$$



Modelo

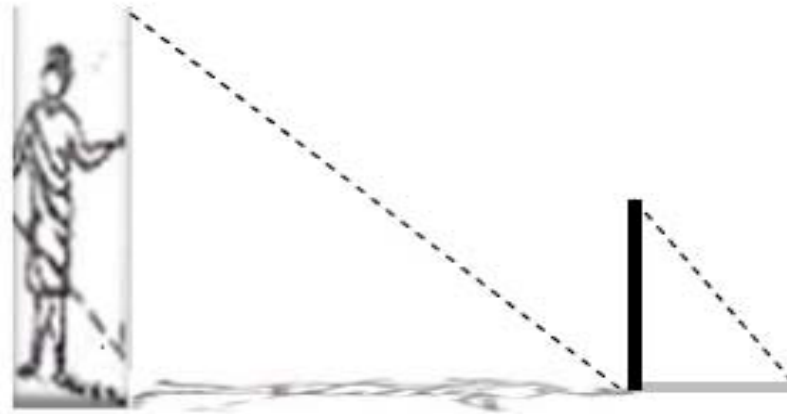


Figura 1: construída pelos autores.

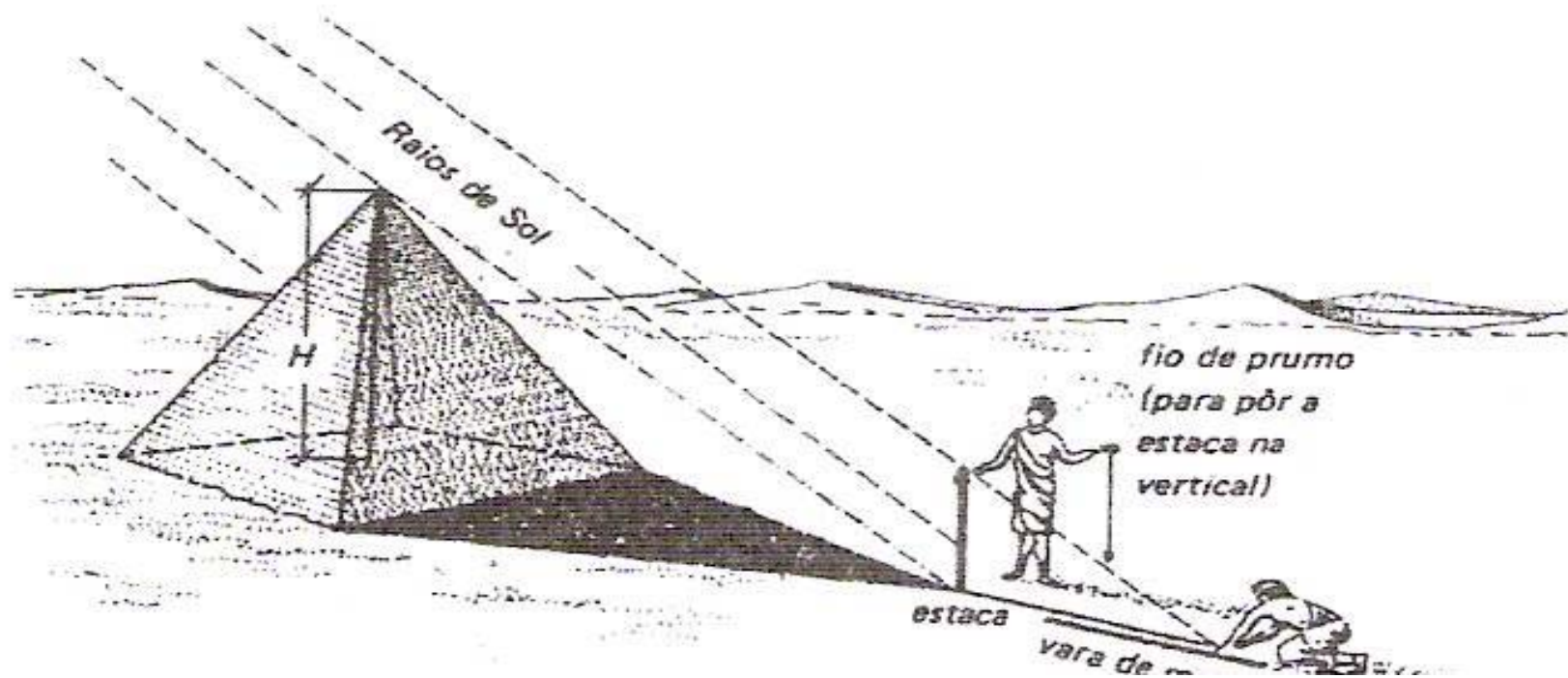
X altura da pessoa e x comprimento da sombra da pessoa

Y altura do bastão e y o comprimento da sombra do bastão

$$X/x = Y/y$$

Modelo Histórico: Teorema de Tales

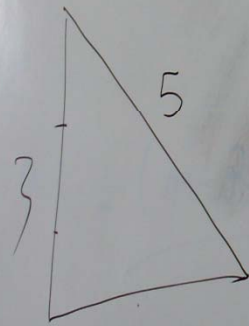
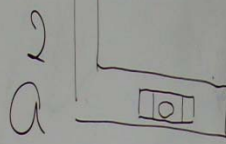
Figura 2: extraída de MENDES (2006)





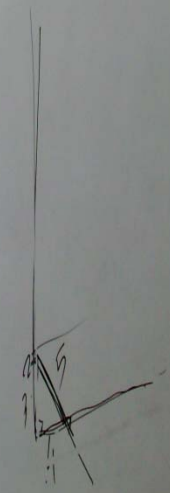
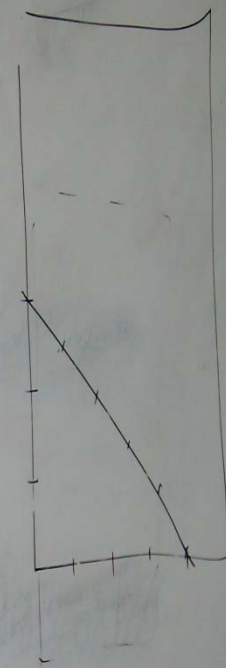
Problema 02

Um mestre de obras e seu ajudante tentam fazer, com fios esticados, um ângulo reto de modo que verifiquem se determinada construção está *dentro ou fora de esquadro*, ou ainda, colocar uma construção que será iniciada por eles *dentro do esquadro*. Com base nessa situação da vida diária, podemos verificar se nossa sala está dentro ou fora de esquadro? Como?



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$9 + 16 = 25$$



Teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$r = 5 \quad 25$$

Carreiros

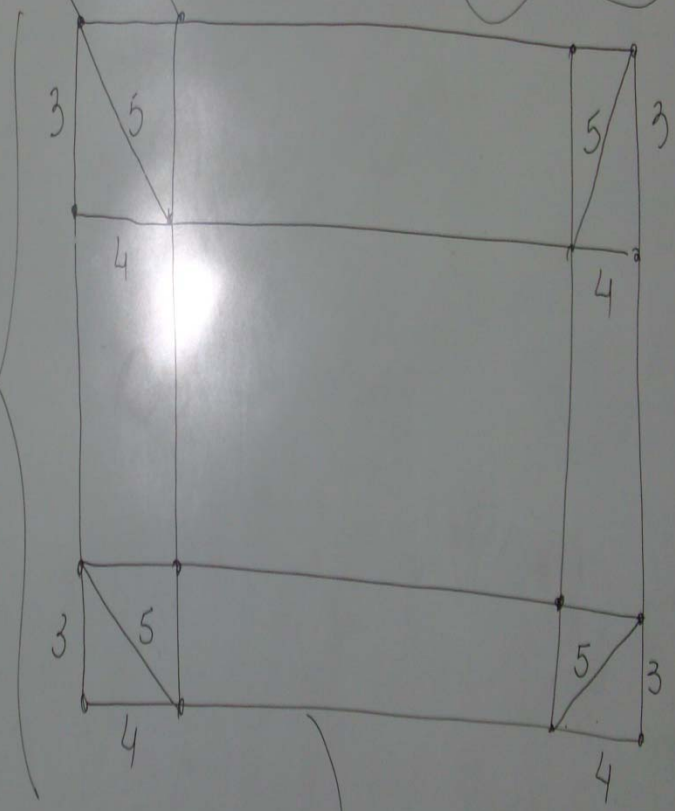
proj

Desenho

Conclusão
 $5 = 3 + 4$ (f)

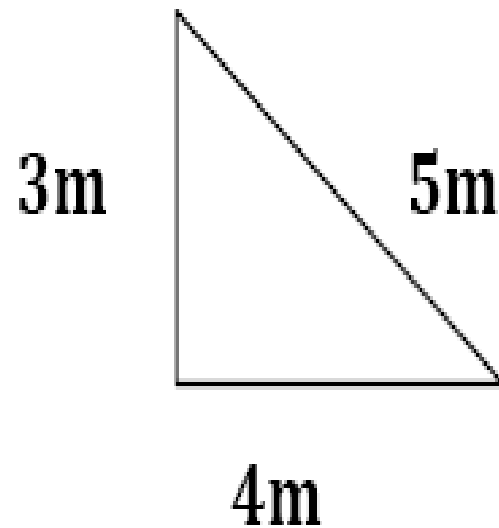
Linguagem

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



linha

Modelo



$$(5\text{m})^2 = (3\text{m})^2 + (4\text{m})^2 \Rightarrow 25\text{m}^2 = 9\text{m}^2 + 16\text{m}^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Modelo Histórico: Teorema de Pitágoras

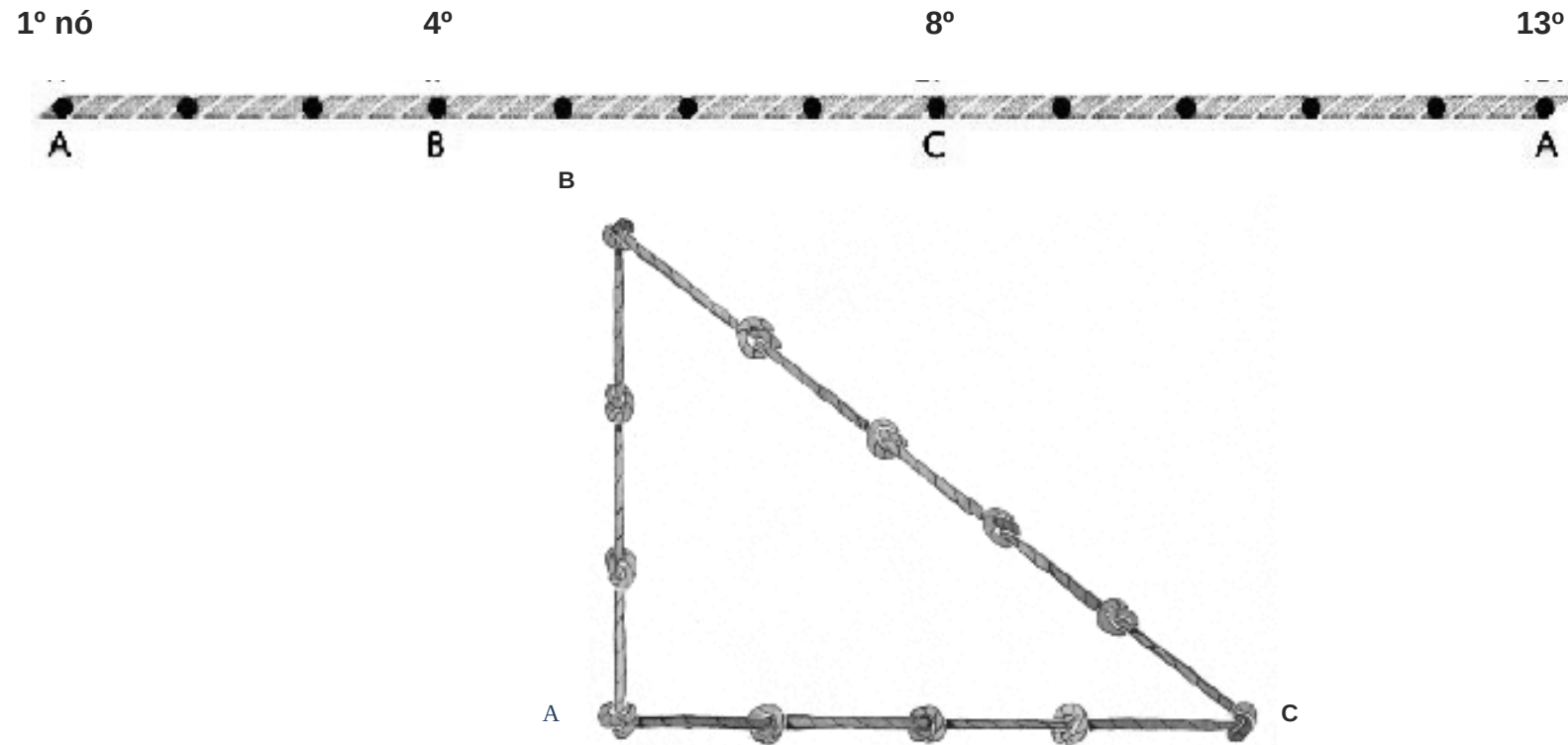


Figura 3 – Modelo da corda de 13 nós empregada pelos antigos egípcios e a formação do triângulo de lados 3, 4, 5

Modelo dos Livros didáticos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos

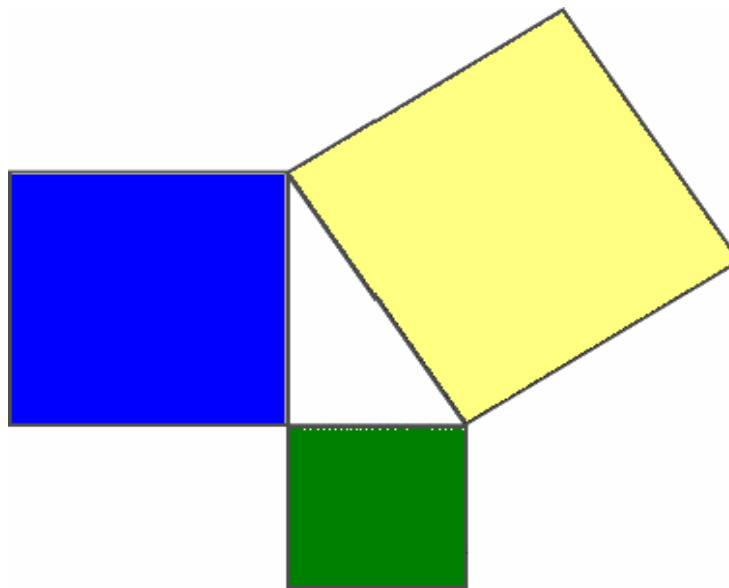
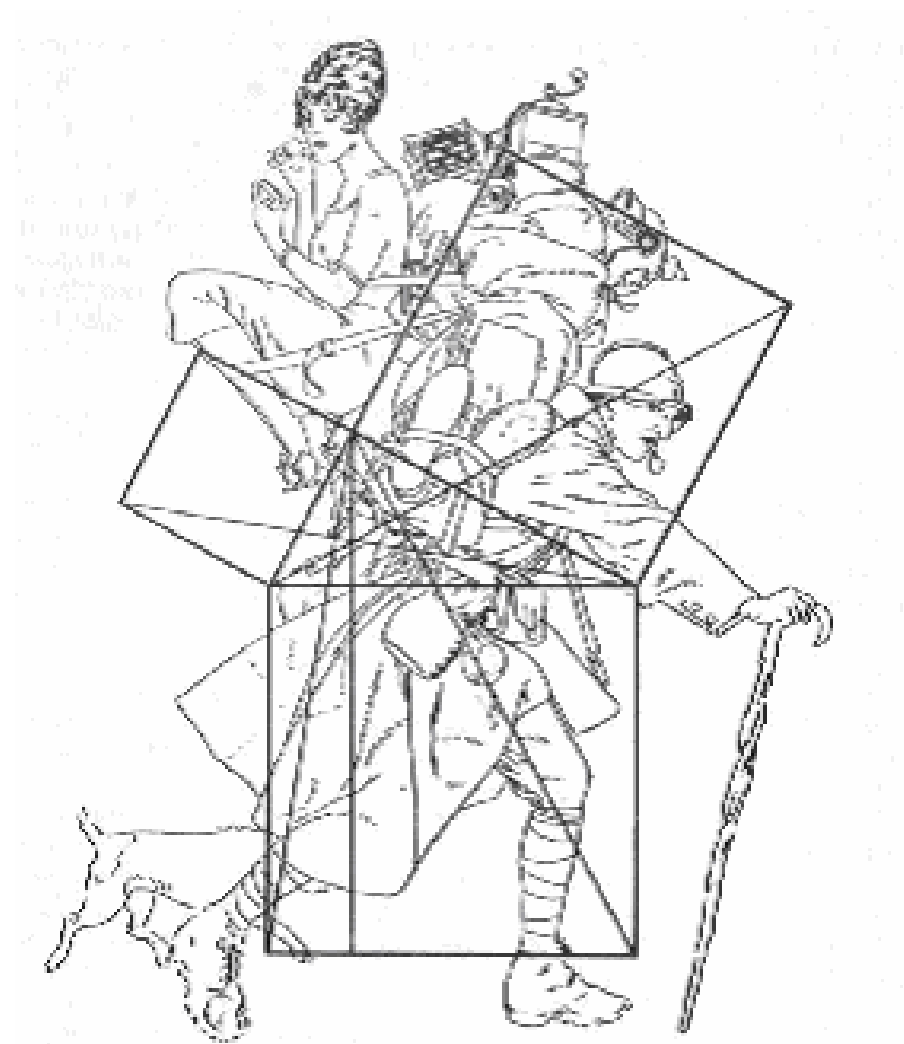


Figura 4 - Forma tradicional da apresentação gráfica do “Teorema de Pitágoras” nos textos didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental

A cadeira da noiva

Figura 5 - extraída do livro História da Matemática de Carl B. Boyer (1992)



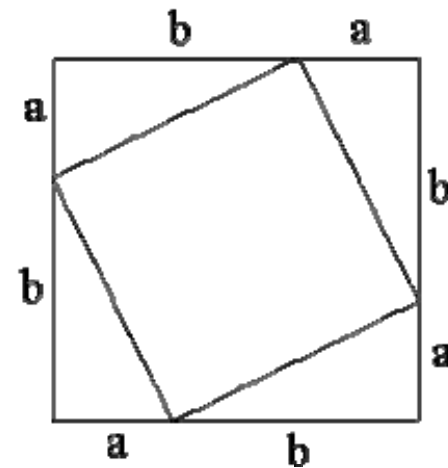
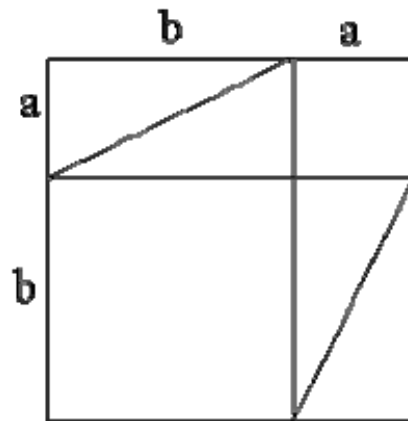
Suposta Demonstração de Pitágoras

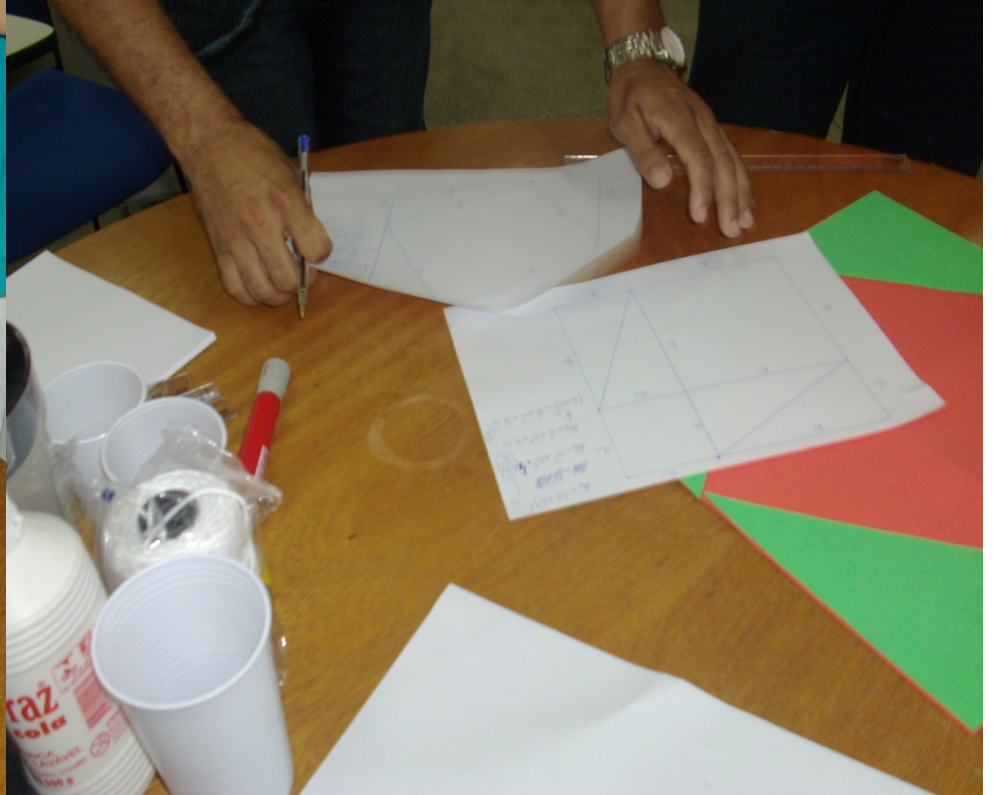
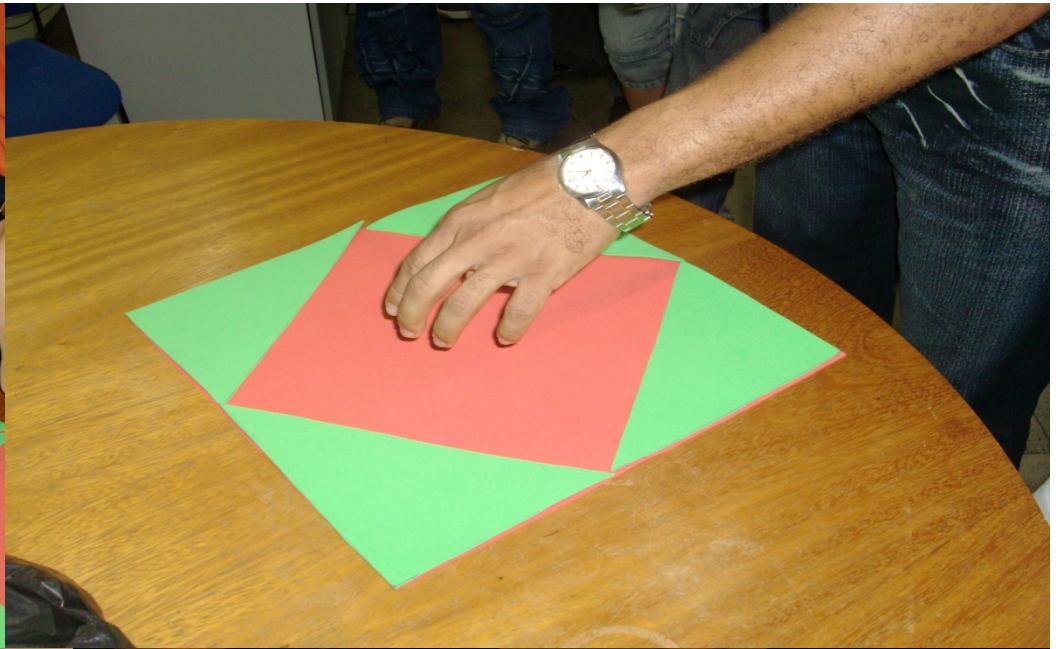
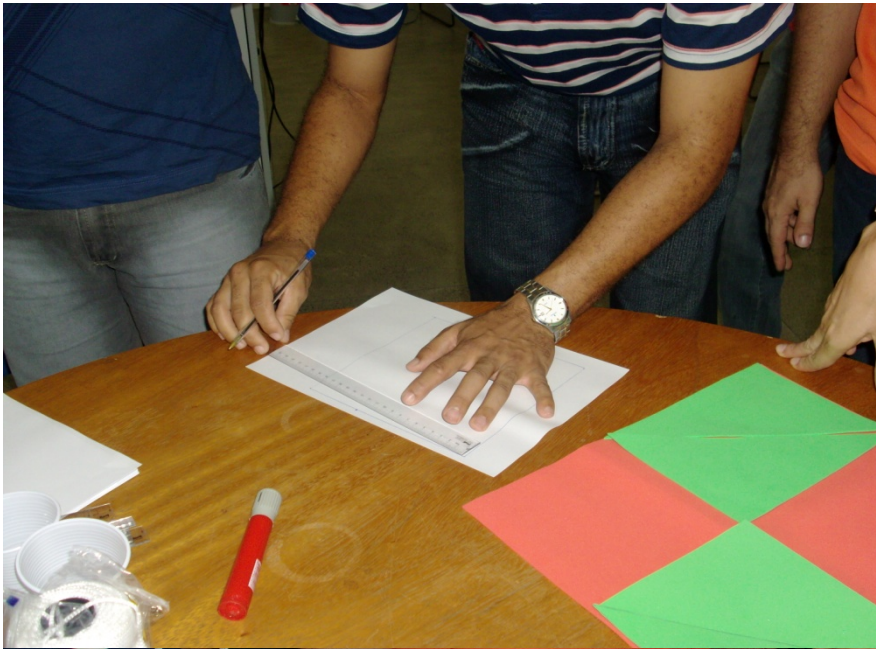
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4S$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 4S$$

$$c^2 + 4S = a^2 + b^2 + 4S$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$







PROBLEMA 3

Observando nossa sala de aula, podemos determinar a área na qual ela foi construída. Como podemos representar qualquer situação semelhante?

MODELO

Área total = área útil + área ocupada pelas paredes + área ocupada pelas colunas.

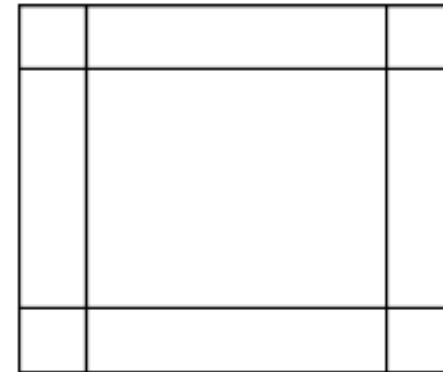
Dados:

Parede interna: $a \times c$

Parede interna: $b \times c$

Colunas: $c \times c$

Paredes externas: $(a + 2c)$ e $(b + 2c)$



Considerando a forma da sala quadrada:

$$a = b$$

$$At = (a + 2c).(a + 2c) = a^2 + 2.(ac + ac) + 4c^2 = a^2 + 4.a.c + 4c^2$$

$$At = a^2 + 4.a.c + 4c^2$$

Equivalente ao Quadrado da Soma de dois
Termos

$$(a + 2c)^2 = a^2 + 2.a.2c + 4c^2$$

$$(a + 2c)^2 = a^2 + 4.a.c + 4c^2$$

MEDINDO SUPERFÍCIES NA ANTIGUIDADE

Nascimento da fórmula da Área do Retângulo

$$\text{Área} = a \times b$$

Método da triangulação para superfícies irregulares.

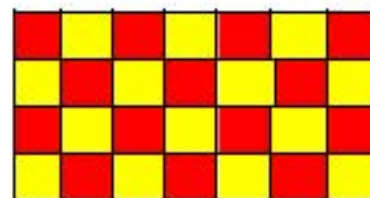
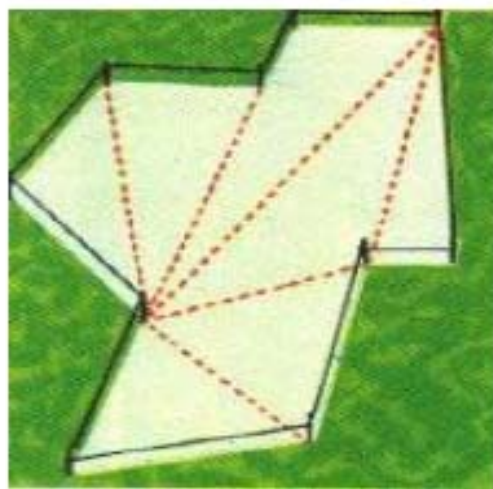


Figura 6 – extraídas do sitio www.somatematica.com.br



Problema 04

Considere uma folha de papel retangular de 20 cm x 20 cm. Dela vamos retirar quadrados nos cantos e construir uma caixa. Qual o tamanho *ótimo* da caixa?

$h(\text{cm})$	$V(\text{cm}^3)$
5	500
2.5	640

5,3 595,5

5,2 500,2

3,5 591,5

$$A_{\square} = (2x+y)^2 - 4x^2$$

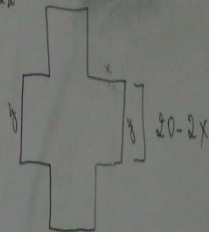
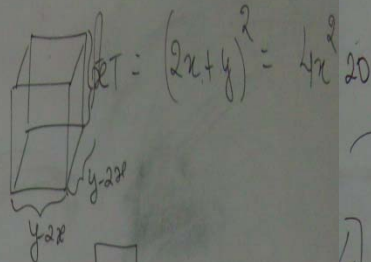
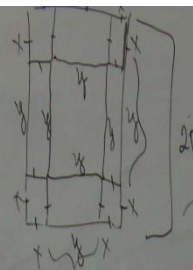
$$A_c = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2$$

$$A_c = 4xy + y^2$$

$$A_c = 4x(20-2x) + (20-2x)^2$$

$$A_c = 80x - 8x^2 + 400 - 80x + 4x^2$$

$$A_c = -4x^2 + 400$$

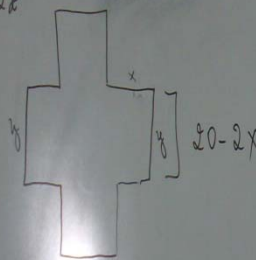
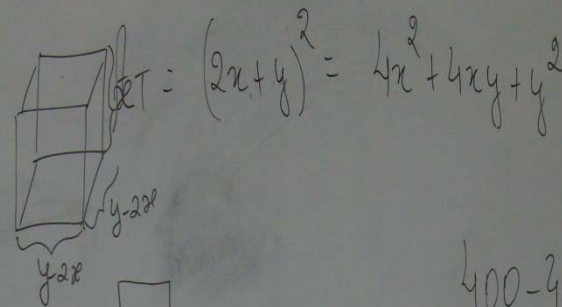


$$y = 20 - 2x$$

$$A_c = 400 - 4x^2$$

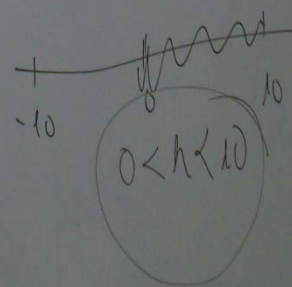
+
-10

$$-80x + 4x^2$$



$$y = 20 - 2x$$

$$A_c = 400 - 4x^2$$



$$400 - 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm \sqrt{100}$$

$$x = \pm 10$$

Conclusão

$$5 = 3 + 4$$

inovação

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = (y-2x) \cdot x$$

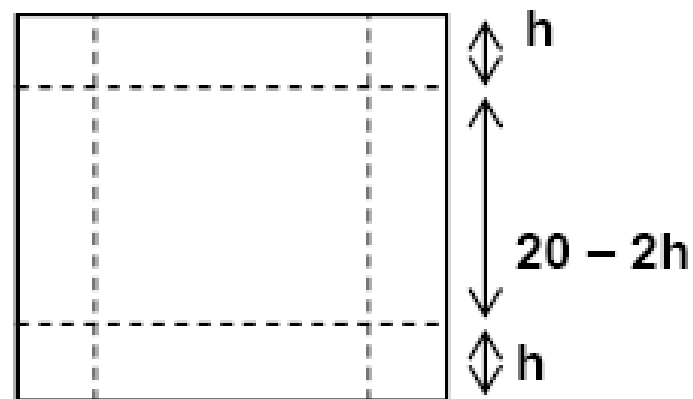
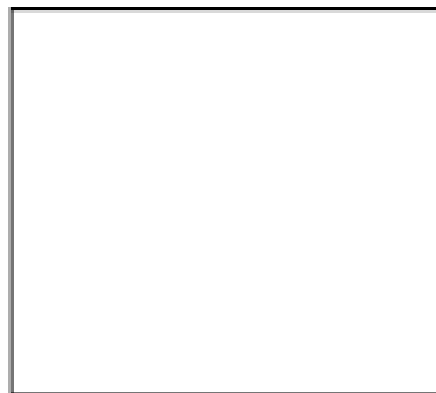
$$V = (y^2 - 4xy + 4x^2) \cdot x$$

$$V = xy^2 - 4x^2y + 4x^3$$

Modelo 1

Função polinomial de grau 3

20 cm




$$V = \text{área da base} \times \text{altura}$$

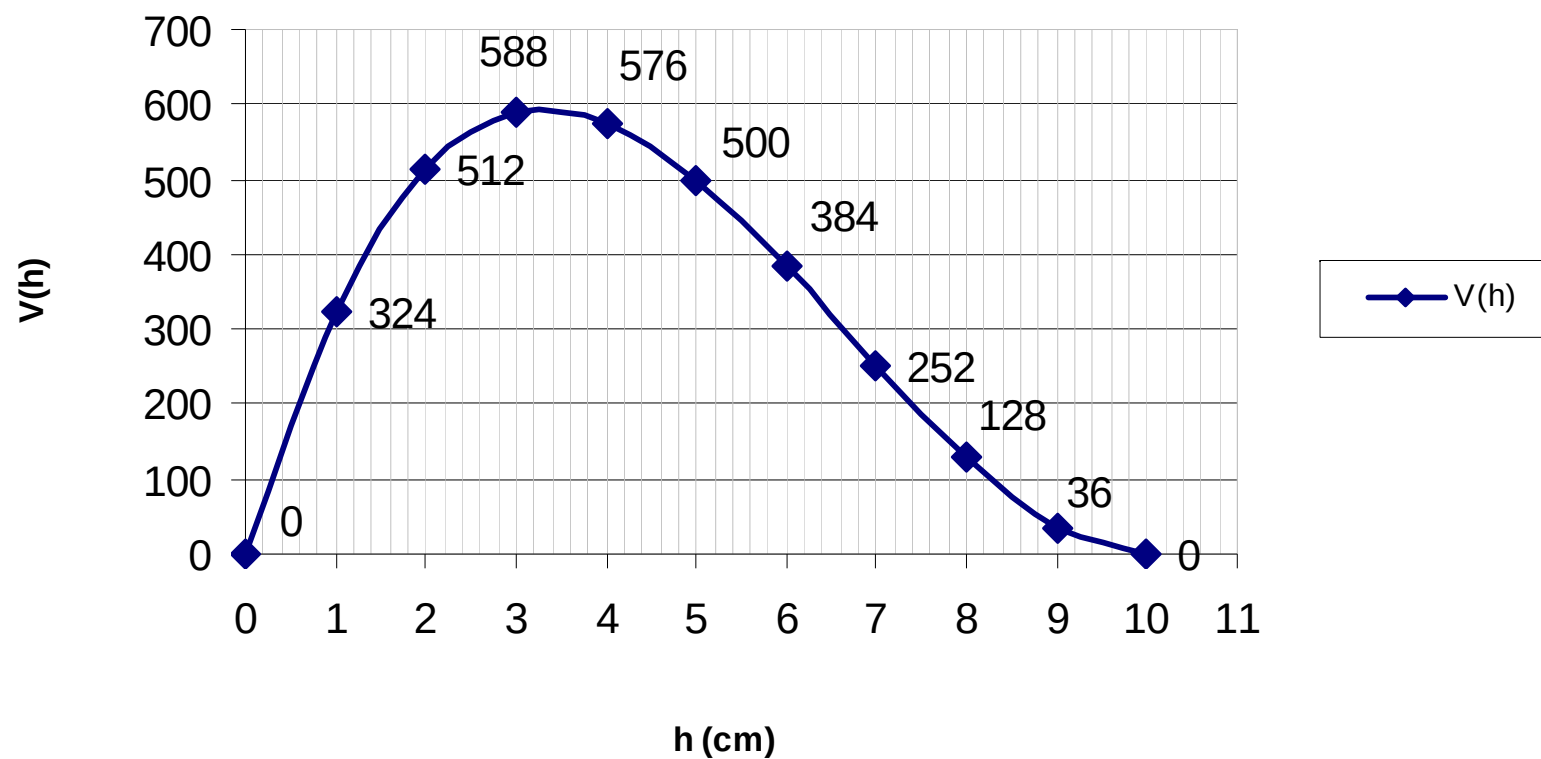
$$V = (20 - 2h)^2 \times h, \text{ onde } 0 < h < 10$$

$$V = (400 - 80h + 4h^2) \times h$$

$$V(h) = 400h - 80h^2 + 4h^3$$

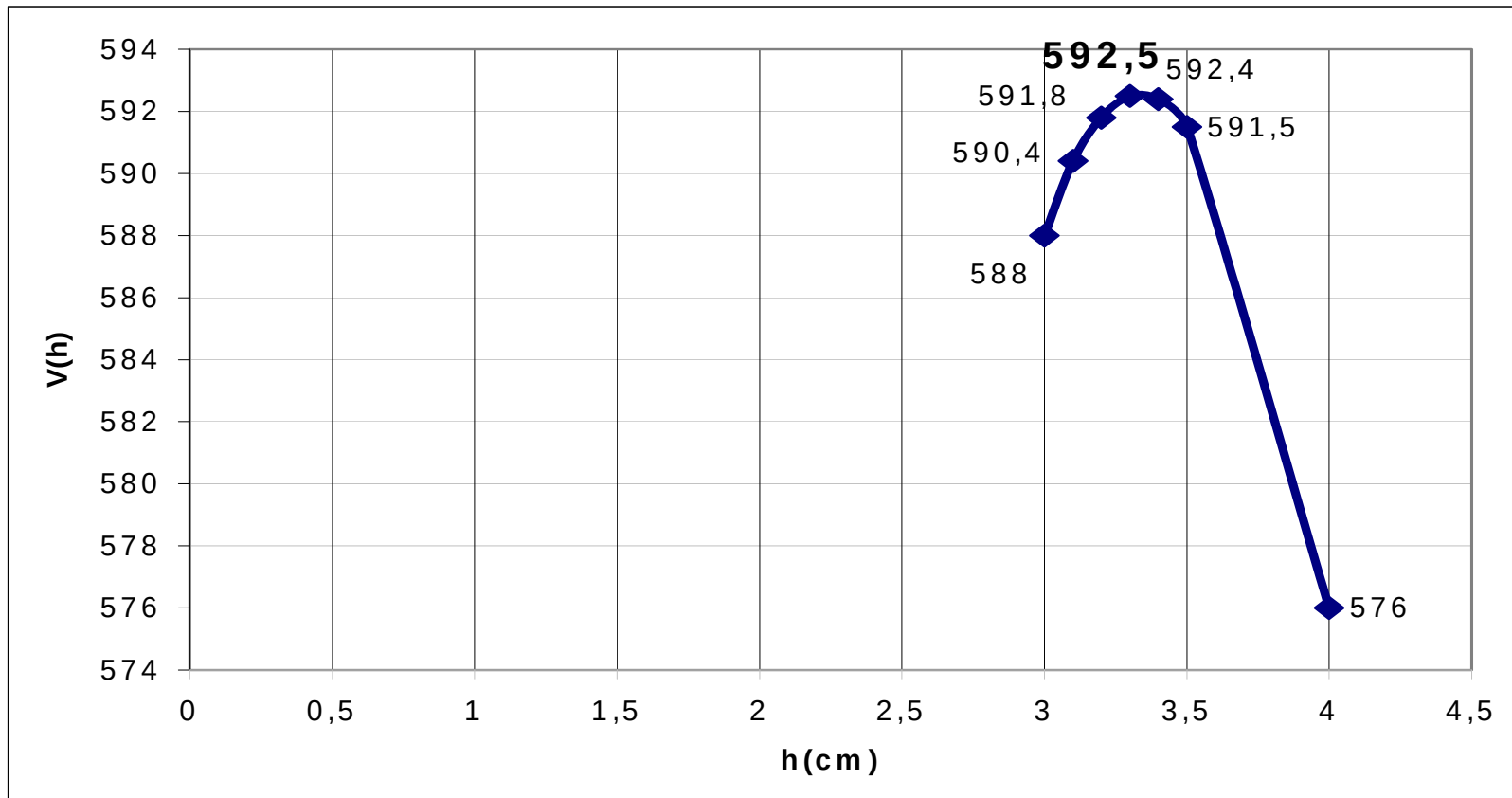
$h(\text{cm})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(h)$ (cm^3)	0	324	512	588	576	500	384	252	128	36	0

Altura Máxima



h(cm)	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
V(h) (cm ³)	588	590,4	591,8	592,5	592,4	591,5

Altura Máxima – H(máx) $\cong$ 3,3 cm
Volume Máximo – V(h) $\cong$ 592,5 cm³



Modelo 2

Derivada de função

$$V'(h) = 12h^2 - 16h + 400$$

$$h_1 = 10 \text{ e } h_2 = 3,3$$

$$V(3,3) = 4 \cdot (3,3)^3 - 80 \cdot (3,3)^2 + 400 \cdot 3,3$$

$$V(3,3) \cong 592,5 \text{ cm}^3$$

Modelo Histórico

Derivada de função

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Problema 05

Calcular o volume de uma maçã!



Figura 7 – extraída do sítio www.fotodemaca.com.br

1º Modelo

Princípio de Cavalieri

$$C_1 = 2.\pi.R = 24\text{cm}$$

$$R = (24/2).\pi \cong 3,8\text{ cm}$$



$$r = 2,3\text{ cm}$$

$$C_2 = 2.\pi.r = 14,5\text{ cm}$$

$$r = (14,5/2).\pi \cong 2,3\text{ cm}$$

$$R = 3,8\text{ cm}$$

$$V_1 = 4 \pi R^3 / 3 = 229,73\text{cm}^3$$

$$V_2 = 4 \pi r^3 / 3 = 50,94\text{ cm}^3$$

$$V = (V_1 + V_2) / 2 = 140,34\text{ cm}^3$$

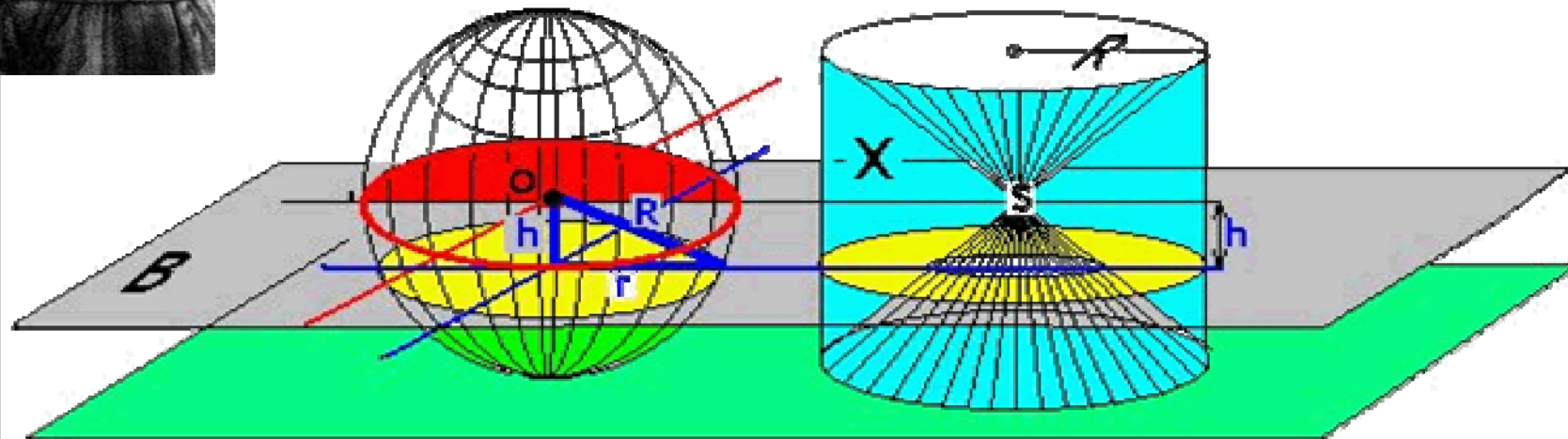
Modelo Histórico

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Figura 8 – extraída da internet CAVALIERI Bonaventura (1598-1647)



PRINCIPIO DE CAVALIERI Volume da Esfera



Seccionando a esfera e o sólido X por um mesmo plano horizontal B, distante h do centro O da esfera e do ponto S, obtemos superfícies de áreas iguais

Pelo princípio de Cavalieri 2 sólidos com a mesma altura tem o mesmo volume se as secções planas de igual altura tem a mesma área. O sólido X tem o volume $V = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot (\text{volume cone})$ —————> O sólido X tem o volume da esfera

LN

Volume do Sólido X

V_x = volume do cilindro - 2.(volume do cone)

$$V_x = \pi R^2 (2R) - 2 \left(\frac{\pi R^2 (R)}{3} \right)$$

V_x = vol. cilindro - 2.(volume do cone)

$$V_x = 2\pi R^3 - 2 \left(\frac{\pi R^3}{3} \right)$$

$$V_x = 6 \frac{\pi R^3}{3} - 2 \left(\frac{\pi R^3}{3} \right)$$

$$V_x = 4 \frac{\pi R^3}{3}$$

LN

Referências

- ÁVILA, Geraldo. **Introdução às funções e às derivadas**. São Paulo: Atual, 1994.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática na sala de aula**. Perspectiva, Erechim (RS). V.27, n.98, p.65-74, junho/2003.
- BEAN, Dale. **O que é Modelagem Matemática?** Revista da SOCIEDADE
- BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática no ensino**. 3 ed. São Paulo: contexto, 2003. P. 31-51.
- BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Td. Hygino H. Domingues. V.6. São Paulo: ED. Atual, 1992.
- . **História da Matemática**. Td. Elza F. Gomide. São Paulo: ED. GARD BLUCHER, 1996. 2. Ed.
- BRASIL, Ministério da Educação e Desportos. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n.º 9394/96**. Brasília: 1997.
- . Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

- 
- D'AMBROSIO, Ubiratan. ***Educação Matemática para uma sociedade em transição***. São Paulo: Ed. Ática, 2001
- Educação Matemática: Da teoria à prática***. Campinas, SP: Papirus, 1996.
- IMENES, L. M; LELLIS, M. ***Descobrendo o Teorema de Pitágoras***. São Paulo: Scipione, 2000.
- MENDES, Iran Abreu. ***Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem***. Natal: Flecha do tempo, 2006.
- MENDES, I. A. ; FOSSA, J. A. ; VALDES, J. E. N. . ***A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática***. Porto Alegre: Sulina, 2006. 182 p.
- MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. ***História na Educação Matemática: Propostas e desafios***. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- RODNEY, Carlos Bassanezi. ***Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia***. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004.